This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: _____

AAS8009
UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/15/88 R/DT 07/15/88 CC **STAT mm E/L 1**
035/1: : |a (RLIN)MIUG84-B52411
035/2: : |a (CaOTULAS)160186425
040: : |a MiU |c MiU
100:1 : |a Villicus, Franz.
245:14: |a Die Geschichte der Rechenkunst vom Alterthume bis zum XVIII. Jahrhundert |b mit besonderer rücksicht auf Deutschland und Österreich. |c Von Franz Villicus.
250: : |a 2. verbesserte und vermehrte aufl.
260: : |a Wien, |b C. Gerold's sohn, |c 1891.
300/1: : |a viii, 108 p. |b illus. fold. tab. |c 27 cm.
650/1:0: |a Arithmetic |x History.
998: : |c SAP |s 9124

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: _____
Camera Operator: _____

Hosted by Google

HERBERT
SILBERER

Die

Geschichte der Rechenkunst

vom

Alterthume bis zum XVIII. Jahrhundert

mit

besonderer Rücksicht auf Deutschland und Österreich.

Von

Franz Villicus,

kaiserl. Rath, emer. k. k. Professor, Director der Gremial-Handelsfachschule der Wiener Kaufmannschaft, Gemeinderath der Stadt Wien, Mitglied des Ortschulrathes im I. Wiener Bezirke, Mitglied des Verwaltungs-Ausschusses des Vereines des Franz Josef-Jugend-Asyles, Besitzer des Anerkennungs-Diploms der Wiener Weltausstellung vom Jahre 1873.

Mit **Illustrationen** und einer tabellarischen Zusammenstellung von **Zahlwörtern aus 72 Sprachen,** nebst Zählungssystemen von altamerikanischen Völkerstämmen.

Zweite verbesserte und vermehrte Auflage.

Wien.

Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.

1891.

Hosted by Google

Hosted by Google

Seiner

kaiserlichen und königlichen Hoheit

dem

Durchlauchtigsten Herrn Erzherzog

Rainer

kaiserlichen Prinzen, Erzherzog von Österreich, königlichen Prinzen von Ungarn und Böhmen,

Ritter des goldenen Vlieses, Großkreuz des Stephan-Ordens, Großkreuz der französischen Ehrenlegion, Großkreuz des württembergischen Kronen-Ordens, Großherzog des spanischen Ordens Karl III., Großkreuz des preußischen Schwarzen Adler-Ordens etc. etc.,

Curator der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Protector des Museums für Kunst und Industrie, Feldzeugmeister und Inhaber des Infanterie-Regiments Nr. 59, Obercommandant der Landwehr für die im Reichsrathe vertretenen Königreiche und Länder etc. etc. etc.

in

tiefster Ehrfurcht gewidmet

von

Franz Villicus.

Hosted by Google

Hosted by Google

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die günstig lautenden Recensionen, deren sich das vorliegende Werk bei seinem ersten Erscheinen zu erfreuen hatte, sind namentlich in den folgenden in- und ausländischen Fachzeitschriften enthalten: Österr. Realschul-Zeitschrift 1883 (recens. Dr. S. Günther in Anspach); Mittheilungen aus dem Gebiete des Seewesens (Pola 1883), Heft XI, Seite 656—657; Archiv der Mathematik „Literarischer Bericht CCLXXI", Seite 25; Philologische Rundschau (Bremen 1883), Nr. 10, Seite 318—319; Literarisches Centralblatt, Seite 1545 (vom Jahre 1883) u. a. m. Durch die zufriedenstellenden Beurtheilungen in den erwähnten Blättern, sowie durch die laut Amtsblattes der „Wiener Zeitung" vom 15. Juni 1884 von Sr. Majestät dem Kaiser von Österreich-Ungarn allergnädigst gestattete Aufnahme des in Rede stehenden Werkes in die k. k. Familien-Fideicommiss-Bibliothek, sah sich der Verfasser ermuntert, den Inhalt der ersten Auflage einer sorgsamen Revision zu unterziehen, nach welcher einige Verbesserungen in der Aufeinanderfolge geschichtlicher Daten und nicht uninteressante Zugaben in einzelnen Abschnitten des Buches vorgenommen wurden. Im Anschlusse an diese Vorbemerkung werden dem Leser noch die folgenden Sätze zur freundlichen Beachtung empfohlen:

Wenn man das Gebiet des menschlichen Wissens vom richtigen Standpunkte betrachtet, wird man finden, dass es keine Wissenschaft gibt, deren Entstehung in der vorgeschichtlichen Zeit soweit zurückliegt, als der Begriff der Zahl und ihre sichtbare Darstellung durch Strecken und Beugen der Finger, welchen Behelfes noch heutigen Tages uncultivierte Völker sich bedienen. Als zu der plastischen Versinnlichung der Zahlen durch Finger die ersten rohesten schriftlichen Zahlzeichen hinzutraten und das Bedürfnis des Rechnens sich fühlbar machte, waren es wieder die Finger, welche der Mensch durch Jahrtausende als eine natürliche Rechenmaschine gebrauchte, bis andere, auf bestimmte Zahlensysteme basierende künstliche Rechenapparate das Fingerrechnen in größerer Ausdehnung ersetzten. Dieses instrumentale Rechnen unter dem Namen „Rechnen auf Linien", welches sich in Deutschland bis tief in das XVI. Jahrhundert erhalten hatte, wurde allmählich von dem allerorts kämpfend eindringenden Zifferrechnen verdrängt, dessen Kenntnis das jetzige Zeitalter schon Schülern einer Volksschule in einem Umfange

Hosted by Google

vermittelt, wie ihn vor wenigen Jahrhunderten selbst Männer des Wissens nicht ihr eigen nennen konnten. Nun gebrauchen Millionen und Millionen Menschen tagtäglich die von dem einstigen Sanskritvolke ererbten Zahlzeichen und das Positions-System fast unbewusst nach bekannten Lehrsätzen der Arithmetik in allen Rechnungsfällen der Geschäftspraxis — und doch wie wenige nur kennen die Resultate vieljähriger Forschungen über die Entstehung der Zahlwörter, Zahlzeichen und Zahlensysteme, welche vor Jahrtausenden manche nun von der Erde verschwundenen Völkerschaften gebrauchten!

In Anbetracht der Thatsache, dass die Rechenkunst tief in das praktische Leben aller Völkerschaften eingreift, muss es für jedermann, dem überhaupt der Sinn für geschichtliche Darstellungen nicht gänzlich abgeht, von großem Interesse sein, die Rechenkunst in ihrem geschichtlich nachweisbaren Entwicklungsgange bei den Culturvölkern alter und neuer Zeit zu verfolgen. Da nun über die historische Entwicklung der Mathematik bereits mehrere Werke veröffentlicht wurden, hingegen bis heute noch keine populär abgefasste Geschichte der Rechenkunst erschienen ist, so entschloss ich mich, die Resultate meines seit Jahren fortgesetzten Sammelns von arithmetisch-historischem Materiale geordnet in einer kurzgefassten und populär dargestellten Geschichte der Rechenkunst zu veröffentlichen.

Obwohl die vorliegende Schrift unter neuen Daten und geschichtlichen Beiträgen auch Bekanntes im Inhalte enthält, wie es bei einer historischen Schrift nicht anders möglich ist, so gibt sich der Verfasser doch der Hoffnung hin, dass der geehrte Leser das vorliegende Buch nicht unbefriedigt aus der Hand legen werde.

Wien, im September 1891.

Der Verfasser.

Hosted by Google

Inhalt.

Seite

Einleitung 1

Erster Abschnitt.

Das Fingerrechnen in der ältesten Zeit bis zum XVI. Jahrhunderte. 3
A. Quellenangaben über das noch übliche Fingerrechnen bei wilden Völkerschaften 4
B. Das Fingerrechnen der cultivierten Völker im Alterthume und im Mittelalter . 6

Zweiter Abschnitt.

Die Zahlzeichen und Zahlensysteme der alten Culturvölker.
Vorbemerkung 15
a) Keilschrift und Zahlenbezeichnung der Babylonier und Perser 16
b) Hieroglyphische, hieratische und demotische Schrift der Ägypter und deren Zahlenbezeichnung 19
c) Zahlenbezeichnung der Griechen nach ihrem Alphabete 23
d) Zahlenbezeichnung der Römer 24
e) Schriftzeichen und Zahlenbezeichnung der Chinesen 26
f) Zahlenbezeichnung der Hebräer 29
g) Zahlenbezeichnung der alten Inder und Araber 30

Dritter Abschnitt.

Über die drei Haupt-Zählungsmethoden und die von verschiedenen Völkern gebrauchten Zahlwörter.
1. Quinäre Zählungs-Systeme in Afrika 36
a) Kaffern auf Mozambique 36
b) Fulah-Neger 37
2. Zählungs-Systeme der Ureinwohner in Amerika 37
a) Araukaner (Bewohner von Chili) 38
b) Karaiben 39
c) Azteken (Urbewohner von Mexiko) 39
d) Quichua's oder Peruaner (Inka's) 41
e) Aimàra-Indianer. 42
f) Cora-Indianer 42
g) Vilela-Indianer 43
3. Die ersten zehn Grundzahlwörter (Cardinalzahlen) verschiedener Völker . . . 44
4. Über die Entstehung der Zahlwörter 45

Vierter Abschnitt.

Rückblick auf das älteste Rechnen der Völker 47

Hosted by Google

Seite

Fünfter Abschnitt.

Indische Rechenkunst nach Brahmagupta und Bhascara.
a) Ganitâdhjaja (Rechenlehre) und Kuttakâdhjaja (Bruchlehre) des Brahmagupta vom Jahre 628 n. Chr. 53
b) Aus der „Lilavati" betitelten Arithmetik von Bhascara-Acharya 57

Sechster Abschnitt.

Indisch-arabische Rechenkunst 61

Siebenter Abschnitt.

Das Rechnen mit Hilfe eines Rechenapparates bis Mitte des XVI. Jahrhunderts.
1. Der Abacus 66
a) Der Abacus (Rechenbrett) der Chinesen 66
b) Der Abacus der Ägypter, Griechen und Römer 68
2. Das Rechnen auf Linien 69

Achter Abschnitt.

Das Rechnen in den Klosterschulen und Privatschulen. 77

Neunter Abschnitt.

Das Rechnen in Deutschland seit Gründung der Wiener Universität bis Ende des XVI. Jahrhunderts 83

Zehnter Abschnitt.

Die Arithmetik des XVII. Jahrhunderts.
a) Umrisse über die methodische Behandlung des arithmetischen Lehrstoffes im XVII. Jahrhunderte 97
b) Cossische Wortrechnung der alten deutschen Algebraisten 104

Hosted by Google

Einleitung.

Die edle Rechenkunst Gott gab, | Wie Gott allmechtig, alle ding
In seiner Gnad von oben hrab. | In zal vnd Mass, vnd in Gewicht,
Daraus wir dann erkennen gring, | Durch seine Weissheit hat gericht.

Hymnus an die Rechenkunst von Eberhard Pöpping.
Im Jahre CIↃ IↃ CXIX.

Wie schon Pythagoras sagte, dass es keiner in der Philosophie zur Vollkommenheit bringen könne, der nicht den Weg des Quadriviums (Arithmetik, Geometrie, Musik, Astronomie) zurücklegte, und dass unter den inbegriffenen vier Wissenschaften zuerst die Arithmetik erlernt werden müsse, welche gewissermaßen die Stelle einer Mutter zu den übrigen einnehme, so hat in ähnlichem Sinne das ganze Mittelalter die Meinung des Pythagoras treulich getheilt; aber auch noch im Anfange der neuen Zeit wird von den Schriftstellern die Arithmetik mit Berufung auf Plato und Aristoteles gerühmt und besungen. Von den Rechenmeistern jener Zeit wurde die Arithmetik als die alleredelste unter den sieben freien Künsten angesehen, weil — wie stets mit Vorliebe und Gewissenhaftigkeit die Stelle aus der heil. Schrift citiert wird — Gott alles nach Maß und Zahl geordnet habe. Wir sehen im obigen Motto diesen Bibelspruch noch im XVII. Jahrhunderte zur Verherrlichung der Rechenkunst von Eberhard Pöpping benützt. Auch noch andere Gründe wurden zum Lobe der Arithmetik vorgeführt, nämlich: ihre allgemeine Nützlichkeit für das praktische Leben und deren vorzügliche Eignung zur Bildung des menschlichen Geistes. So schreibt Melanchthon: „Nicht wenn ich hundert Zungen hätte, könnte ich aufzählen, in wie vielen Fällen die Zahlen Nutzen gewähren. Und so augenfällig und auf der Hand liegend ist der Nutzen nicht nur der Zahlen, sondern auch der Kunst, welche lange und verwickelte Rechnungen mit wunderbarer Geschicklichkeit durchführt und erklärt, dass ich niemanden für so stumpf halte, dass er nicht die Zahlen bewundere und die Rechenkunst hochschätze. Kein Gebildeter kann sie vernachlässigen, weil sie die Quelle und der Anfang alles Vernunfterschließens ist ....“

Die Kenntnis der Zahlen und ihre einfachste Verbindung im Rechnen, welche unser Jahrhundert schon in der Kleinkinderstube vermittelt, wird heutzutage kaum als eine geistige Errungenschaft beachtet; und doch gewährt es ein großes Interesse, zu verfolgen, wie die Entstehung unserer, nun von allen Culturvölkern gebrauchten Zahlenreihen und das Rechnen mit denselben

Hosted by Google

in längstverschwundenen Zeiten und an fernen Orten seinen Anfang nahm, und wie Jahrhunderte lang nur die begabtesten Männer zur Kenntnis der Zahlen und ihrer vier Rechnungsspecies gelangten, welche in unseren Tagen nun jeder Knabe der Volksschule mit größerer Leichtigkeit zu gebrauchen versteht, als Jünglinge des XIV. Jahrhundertes, die an der im Jahre 1365 gegründeten Wiener Universität ihre Studien machten, an der man in jener Zeit beim Unterrichte im Rechnen über die vier Grundrechnungsarten und die Regeldetri nicht hinauskam.

In Bezug auf die Entwicklung der besonderen Arithmetik, die unter den sieben freien Künsten (Trivium und Quadrivium) als arithmetische Kunst den Namen „Rechenkunst“ führte, begegnen wir auf dem durchschnittlichen Entwicklungswege drei Hauptmethoden des Rechnens, nämlich: das Fingerrechnen, das instrumentale Rechnen und das Zifferrechnen.

Das **Fingerrechnen** (computus digitalis, auch computus manualis) — von welchem wir nachfolgend sprechen werden, und das bei den „Zählungssystemen in plastischer und lautlicher Darstellung“ ausführlicher behandelt werden wird — nahm seinen Anfang schon in jenen Jahrtausenden vor unserer Zeitrechnung, in der die Menschen noch nicht über den Erdball zerstreut, in ihrer Urheimat zu den ersten Begriffen über die Zahl aus den sie umgebenden gleichartigen Naturgegenständen gelangten. Die mehrfach in der Natur von Menschen bemerkten gleichartigen Dinge führten nach gewonnener Vorstellung über die Einheit und deren Mehrheit zu der Frage: Wie oft? welche Frage nach Fixierung der Zahl durch bestimmte Streckungen und Beugungen der Finger beantwortet wurde.

Das **instrumentale Rechnen**, oder das Rechnen mit Hilfe eines Rechenapparates (Abacus, Suan-pan der Chinesen, Rechenbrett mit Linien) gehört zur zweiten Entwicklungsstufe des Rechnens. Dieses mechanische Rechnen, welches das Bestehen eines schon bestimmten Zahlensystems voraussetzt, erhielt sich bei der allgemeinen Unkenntnis des Schreibens bis in die zweite Hälfte des XVII. Jahrhundertes. Das instrumentale Rechnen mit dem „Suan-pan“ steht heute noch im Gebrauche bei den Chinesen.

Das **Zifferrechnen** oder das Positionsrechnen, hervorgerufen und verwirklicht durch die aus Indien stammende Zahlengraphik, bildet die dritte Entwicklungsstufe der Rechenkunst. Die mehr allgemeine Verbreitung der Schriftkenntnis und des Buchdruckes in Verbindung mit der Errichtung von Schulen für das Volk, die sich entfaltenden Wissenschaften, das Wachsen des Handels und der Industrie haben die neue, durch die Araber uns vermittelte Rechenmethode gefördert, und verdrängten endlich das schwerfällige instrumentale Rechnen aus Schule und Haus.

Diese drei Entwicklungsstufen des Rechnens dem Leser möglichst nach geschichtlichen Quellen vorzuführen, ist der Zweck der nun folgenden Abschnitte.

Hosted by Google

Erster Abschnitt.

Das Fingerrechnen in der ältesten Zeit bis zum XVI. Jahrhunderte.

Das Zählen an den Fingern sowohl in ähnlicher Weise, wie es unwillkürlich schon ein Kind auszuführen pflegt, welches die zu addierenden Zahlen durch ebensoviele ausgestreckte Finger sich versinnlicht, als auch in einigermaßen künstlicher Ausbildung mit bestimmtem Werte der einzelnen Finger finden wir nicht allein bei Völkern des Alterthums als nachweisbar, sondern auch noch in der Gegenwart bei verschiedenen uncultivierten Völkerstämmen in Ausübung, welche die Endglieder ihres Körpers (Finger und Zehen) gewissermaßen als den arithmetischen Ausgangspunkt und Maßstab für alle Zahlenbildungen ansehen.

In der ersten Periode der Culturentwicklung, deren Anfänge Jahrtausende in Anspruch genommen haben dürften, kam der Mensch durch die in der Natur getrennt vorkommenden Wesen und Dinge in anschaulicher Weise zu dem Begriffe über das Wieviel?, welche Frage nur durch das richtige Zusammenfassen der Einzelngrößen zu einer Zahl beantwortet werden konnte. Hierbei mag dem Menschen bei dieser Frage zunächst die Anzahl der zu zählenden Dinge aufgefallen sein, die in ebenso großer Menge vorhanden waren, als die Hand Finger hat, und so fand er es bequem, in der Vorzeigung der Hand plastisch die Zahl 5 und Mengen unter fünf durch Vorzeigung eines und einiger Finger darzustellen. Bald darauf mag das Zählen der Finger auf beide Hände ausgedehnt worden sein, wonach in dem gleichzeitigen Vorstrecken der beiden Hände die Zahl 10 ihre plastische Versinnlichung fand. So dürfte das wiederholte gruppenweise Zählen zu je 10 im Handsysteme seinen ersten Grundbau für unsere dekadische Numeration erhalten haben.

Wenn wir uns nun weit zurück in die vorgeschichtliche Zeit des Steinalters und der Pfahlbauten versetzt denken, in der noch die bereits seit Jahrtausenden von der Erde verschwundenen Völkerschaften jene vor dem Untergange durch die Schrift nicht bewahrten Idiome sprachen, so können wir bei der Wortarmut der in ihrer Entwicklung begriffenen Sprachen mit großer

Hosted by Google

Sicherheit annehmen, dass diese Urvölker das Zählen zuerst nicht durch Laute, sondern lediglich durch Vorzeigung der Finger und Hände vornahmen. Diese Annahme findet ihre Bestätigung auch darin, dass noch in unserem Jahrhunderte die wilden Völkerstämme in Afrika und Amerika die Zählung mit Hilfe der Finger vornehmen, wie wir nachfolgend nachweisen, und zwar:

A) Quellenangaben über das noch übliche Fingerrechnen bei wilden Völkerschaften.

a) In Potts „Sprachverschiedenheit“ findet man S. 46 nach Schreuders Angabe: „Die Zulu-Kaffern (an der Ostküste Südafrikas) zählen mit den Fingern, beginnend mit dem kleinen Finger der linken Hand, indem jeder gezählte Finger ausgestreckt wird. Der zweite Zehner wird mit dem kleinen Finger der rechten Hand begonnen und schließt ab mit dem kleinen Finger der linken Hand. Streckt man demgemäß Daumen und Zeigefinger an der rechten Hand aus, so bedeutet dieses Zeichen 7, selbst dann auch, wenn die Finger der linken Hand nicht ausgestreckt sind. Nach jedem vollendeten Zehner werden beide Hände mit ausgestreckten Fingern zusammengeschlagen. Wurden an der rechten Hand zugleich der kleine Finger, der Gold- und Mittelfinger ausgestreckt, so bedeutet dies über den ersten vollen Zehner 3 mehr, also 13. Nach zweimaligem Händezusammenschlagen der Daumen an der rechten Hand vorgezeigt, bedeutet die Zahl 26 u. s. w.“

b) Holmboe bemerkt im „Journal des Orients“ Bd. III, S. 65: „An öffentlichen Orten in Asien kommt beim Handel nicht selten auch das Zählen durch Fingerstellungen derart in Anwendung, dass Käufer und Verkäufer ihre Hände unter dem Rockschoße oder Mantel zusammenbringen und durch Bewegung der Finger Preis und Anbot einander kundgeben, auch den Handel abschließen, ohne dass die Umstehenden etwas von den Bedingungen erfahren.“

c) In dem Werke Dobritzhofers, der laut Vorrede als Missionär sieben Jahre in Amerika zubrachte, ist im II. Th., S. 202—204 zu lesen: „Fragt man einen Abipone über eine kleine Anzahl Dinge, so antwortet er mit der stummen Zahl der aufgehobenen Finger und sagt hierbei: Leyer iri (Sieh! so viel). Zahlen über 10 zeigt er durch wiederholtes Ausstrecken der Finger an. Wenn aber die Abiponer des Fingeraufhebens überdrüssig sind, so rufen sie aus: Pop! oder Yoaliripi! (Viele! Unzählige!). Einst langte im Orte eine Rotte von 10 Mann Soldaten an. Sogleich schrieen die von allen Seiten zusammenlaufenden Indianer: Yoaliripi latenk naúeretape! (Unzählig viele Leute kommen!) Dies hat seinen Grund darin, weil manche Indianerstämme ungemein arm an Zahlwörtern sind.“ (Vgl. die später folgende Zählungsweise der Karaiben-Indianer.)

d) In Lichtensteins „Reisen im südlichen Afrika“ ist im I. Th., S. 668 zu lesen: „Gewöhnlich deutet der Koosa, wenn er eine Zahl aus-

Hosted by Google

spricht, diese zugleich durch aufgehobene Finger an. Ja, die meisten von ihnen nennen dabei selten das Zahlwort. Die Zahlwörter sind bei ihnen überhaupt so wenig im Gebrauche, dass es Mühe kostet, sie zu erfahren."

e) In den Nachrichten der „Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften" vom J. 1866, Nr. 20, ist von P. Kölle, der früher als Missionär Afrika bereiste, Folgendes zu lesen: „Beim wirklichen Zählen fiel mir der Umstand auf, dass viele von den Bolaner-Negern ihre Finger zuhilfe nehmen. Sie zählen regelmäßig mit dem Zeigefinger der rechten Hand die Finger der linken, dann mit dem Zeigefinger der linken Hand die Finger der rechten; dabei in beiden Fällen ausnahmslos bei dem kleinen Finger anfangend und mit dem Daumen endigend."

f) Wie einige Völkerschaften des südlichen Afrikas an den Fingern größere Zahlen sich zu versinnlichen pflegen, erzählt Schrumpf in der „Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft", XVI. Bd., S. 463, wie folgt: „Beim Abzählen von Gegenständen, z. B. bei Zählung der Häute, wenn es über Hundert geht, müssen in der Regel immer drei Mann zusammen die schwere Arbeit verrichten. Einer zählt dann an den Fingern die Einheiten, indem er von der linken Hand mit dem kleinen Finger beginnt und reihenweise an den Händen die Finger einen nach dem andern streckt. Der zweite Mann beginnt ebenfalls mit dem kleinen Finger an der linken Hand der Reihe nach durch Ausstrecken der Finger die Zehner bis zum letzten Finger der rechten Hand, d. i. bis zum kleinen Finger zu zählen. Der dritte Mann hat die Aufgabe, durch Streckung der Finger die vollendeten Hunderter anzudeuten.

Dass uncivilisierte Völker nicht allein die Finger, sondern auch die Fußzehen zum Zählen und zu Zahlendarstellungen benützen, geht auch aus den Mittheilungen von Hankel hervor, in welchen angegeben wird, dass nach Übersetzungen aus einer amerikanischen Sprache der Wilden die übersetzten Zahlenausdrücke: Fußeins = 11, Fußzwei = 12 u. s. w. sich ergeben, weil diese ungebildeten Völker nach dem Abzählen der Finger an den Zehen weiterzählen.

Die von Hankel erwähnte Art des Zählens der Wilden in Amerika, die von den Fingern fortschreitend zu dem Zählen auf den Fußzehen übergehen und in Gruppen zu 20 die Zahlenmenge zu bezeichnen pflegen, finde ich auch bestätigt in dem vor mir liegenden Werke des Abbate Don Lorenzo Hervas. Aus diesem entnehme ich S. 104 die folgende Zählungsweise der Wilden, und zwar der Tamanaki-Indianer:

1 = tevinitpe,
2 = akkiakè,
3 = akkiluòve,
4 = akkiakemnene,

Hosted by Google

5 = amñaitòne (d. h. ganze Hand),
6 = itakonò amñpona tevinitpe (d. h. der andern Hand eins),
7 = itakonò amñpona akkiakè (der andern Hand zwei),
..... etc.
10 = amña-akeponàre (zwei Hände),
11 = puitta-ponà tevinitpe (vom Fuß eins),
15 = iptaitone (zwei Hände, Fuß),
16 = itakonò-puitta-ponà tevinitpe (wörtlich: vom andern Fuß eins),
20 = tevin-itèto (ein Indianer oder ein Mann),
21 = itakonò itòto yamñar-ponà tevinitpe (vom andern Manne oder Indianer an den Händen eins),
30 = itakonò itòto-ponà amña-akeponà (der andere Mann mit beiden Händen),
40 = akkiakè itòto (zwei Indianer),
100 = amñaitòne-itòto (wörtlich: Indianerhand, gleichbedeutend mit 5 Indianern.

Bei Bildung der zusammengesetzten Zahlwörter gebrauchen die Tamanaki-Indianer nur die zwei Wörter „tevin“ und „akkia“, welche eins und zwei ausdrücken.

Die vorbenannten Zahlwörter dienen eigentlich nur zur Zählung von Personen; beim Zählen der Thiere und Sachen wird „itòto“ ausgelassen und es treten überdies noch einige kleine Veränderungen in den vorerwähnten Zahlenausdrücken ein.

Es gibt keinen Indianer in Amerika, sagt A. Gilj im 2. Bande seiner Geschichte des Orinoco, welcher eine Zahl ausspricht, ohne sie mit den Fingern, oder mit der Hand, oder mit den Füßen anzuzeigen. Wenn der Indianer sagt: gib mir eine Frucht, sogleich hebt er einen Finger; er wird nie sagen fünf, ohne die eine Hand zu zeigen; nie zehn, ohne beide Hände auszustrecken, und nie 20 aussprechen, ohne mit den Fingern beider Hände hinzuweisen auf die Zehen der Füße.[1])

B) Das Fingerrechnen der cultivierten Völker im Alterthume und im Mittelalter.

Das Fingerzählen, d. h. das Zählen an den Händen, erscheint bei einigen alten Völkern aus einer Zeit nachgewiesen, in der wir kaum mehr als die ersten Anfänge von Bildung in Anspruch nehmen können. So finden wir bei den alten Ägyptern aus der ersten Hälfte des V. nachchristlichen Jahrhunderts die Überlieferung von einer Zahlenbedeutung des Ringfingers noch

[1]) Non c'è nell' America un Indiano, dice A. Gilj nel tomo 2 della sua storia dell' Orinoco, che pronunzj un numero senza indicarlo colle dita, o colla mano, o coi piedi. Se l'Indiano dice, dammi un frutto, subito alza un dito; non dirà mai cinque, senza mostrare una mano; non mai dieci senza stenderle tutte le due, e non mai venti, senza additare le dita delle mani verso quelle de' piedi. (Aritmetica delle nazioni dell' Abbate Don Lorenzo Hervas, a. 1784, pag. 105.)

Hosted by Google

vorhanden, nämlich: der Ringfinger umgebogen und die andern Finger gestreckt, bedeutete die Zahl 6.[1]) In einer Pariser Sammlung ägyptischer Alterthümer findet sich eine rechte Hand, an welcher die zwei letzten Finger umgelegt sind. Das kann, sagt Cantor in seinen Vorlesungen über Geschichte der Mathematik S. 43, wenigstens eine Zahlenbedeutung gehabt haben. Beinahe aber bis zur Gewissheit führen Bezeichnungen altägyptischer Ellen, welche in mehreren Exemplaren noch vorhanden sind. Hierbei hatte man die Zahlen von 1 bis 5 durch die fünf Finger der linken Hand, welche allmählich vom kleinen Finger anfangend ausgestreckt wurden, dargestellt. (Lepsius, Die altägyptische Elle und ihre Eintheilung, 1865.)

Spuren des Fingerrechnens finden sich nach Herodot auch bei den Griechen, wo angegeben wird, dass man an den Fingern die Monate berechnete.

Zu der mehrfach gedruckten Schrift des Nikolaus Rhabda von Smyrna, in der das Zählen an den Fingern vorkommt, bemerkt Cantor S. 435: „Wir haben keinerlei Grund anzunehmen, das Fingerrechnen sei jemals ganz in Vergessenheit gerathen, aber doch ist die Darstellung des Rhabda die einzige in griechischer Sprache, in welcher förmlich gelehrt wird, was meistens durch mündliche Überlieferung sich fortgesetzt haben mag. Rhabda schildert aufs ausführlichste, wie man durch Beugung der Finger die einzelnen Zahlen darstellen solle. Die Finger der linken Hand dienen zur Bezeichnung der Einer und Zehner, die der rechten zur Bezeichnung der Hunderter und Tausender, und zwar ist die Aufeinanderfolge des Stellenwertes, wenn wir so sagen dürfen, von links nach rechts, nämlich: an der linken Hand werden der kleine Finger, der Gold- und der Mittelfinger für die Einer, der Zeigefinger und Daumen für die Zehner in Bewegung gesetzt; hingegen mit der rechten Hand werden durch Beugung der drei letzten Finger die Hunderter und durch den Zeigefinger und Daumen die Tausender dargestellt. (Vgl. Finger-Numeration nach Beda.)

Wie die Griechen in alter Zeit das eigentliche Fingerrechnen betrieben haben, ist nicht bekannt; doch die Wahrscheinlichkeit spricht dafür, dass sie ähnliche Grundsätze in den Fingerwerten durch Beugungen wie in späterer Zeit beobachteten.

In Cantors Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I., S. 446, ist zu lesen: Das Fingerrechnen hat die älteste Überlieferung für sich, indem nach Plinius schon König Numa eine Zahlendarstellung mittelst der Finger kannte. Er ließ nämlich ein Standbild des doppeltbeantlitzten Janus errichten, dessen Finger die Zahl der Jahrestage andeuteten. Neben diesen Angaben ganz bestimmter, durch Fingerbeugungen angedeuteter Zahlen bestätigen auch mehrere römische Schriftsteller das bei den Römern übliche Fingerrechnen. So ist bei Quintilian von einer Abweichung der Rechnung

[1]) In der folgenden bildlichen Darstellung der Finger-Numeration nach Beda bedeutet der umgebogene Ringfinger (Goldfinger) an der linken Hand ebenfalls die Zahl 6.

Hosted by Google

durch unsichere oder unrichtige Bewegung der Finger die Rede, und ähnlich bei anderen.

Dass die Römer in alter Zeit das Zählen mit Hilfe der Finger an beiden Händen vornahmen, dürfte sich aus den späteren römischen Zahlzeichen, in welchen das Handzeichen V bei den Römern die Zahl 5 bedeutete, als auch aus den die Finger vorstellenden Ergänzungszahlen I, II, III, IIII, in VI, VII, VIII, VIIII (oder IX) erweisen. Ihr Rechnen war ähnlich wie bei den Griechen hauptsächlich Kopfrechnen, bei dem sie die Finger zur Fixierung gewonnener Zahlen gebrauchten.

Was das Rechnen mit Hilfe der Finger betrifft, so sind geschichtliche Anzeichen vorhanden, dass sich dieser Rechnungsweise nicht allein die Römer und Griechen, sondern auch alle Culturvölker des Orients in den ältesten Zeiten bedient haben. Man unterstützte sogar noch in jener Zeit, als das Abacus-Rechnen (von dem ich später sprechen werde) eintrat, dasselbe mit Hilfe des Fingerrechnens. Die Kunst des Fingerrechnens für die Numeration bestand darin, durch bestimmte Stellungen der Finger und Hände die Zahlenwerte darzustellen. Die 9 ersten Einheiten wurden durch verschiedene Stellungen der drei letzten Finger und die 9 Zehner durch den Daumen und Zeigefinger der linken Hand dargestellt. Dieselben Stellungen machten die Finger der rechten Hand, und zwar der Daumen und Zeigefinger, um die Hunderter, und die drei letzten Finger, um die Tausender auszudrücken. Die Zehntausender gab die linke Hand an, indem sie auf die Brust gelegt wurde; die Hunderttausender wurden bezeichnet durch das Auflegen der rechten Hand auf die Brust. Das Zusammenlegen der Finger beider Hände ineinander bedeutete eine Million. — Diese plastische Darstellung der Zahlen war besonders vortheilhaft für alle des Schreibens und Lesens unkundigen Menschen, überdies wurde dadurch das Kopfrechnen unterstützt, wie nicht minder der commercielle Verkehr zwischen jenen Personen vermittelt, die nicht die gleiche Sprache verstanden.

Das in Deutschland übliche Fingerrechnen wurde auch dann nicht ganz beseitigt, als das Rechnen auf den Linien, von welchem später ausführlicher gesprochen werden wird, seinen Anfang nahm, sondern hat sich im Volke aller Länder noch lange neben der neueren Rechnungsweise (Rechnen auf der Feder genannt) erhalten, wie es uns die Schriften aus dem XV. und XVI. Jahrhunderte beweisen. So finden sich in der Schrift des Italieners Lucas de Borgo[1]) 36 Abbildungen von Stellungen der Finger, welche durch Strecken, Einbiegen oder vollständiges Anlegen an den Nebenfinger oder an die Handfläche dargestellt erscheinen, wodurch Zahlen derart versinnlicht wurden, dass man Einer und Zehner durch die linke, Hunderte und Tausende durch die rechte Hand ausdrückte. Lucas de Borgo empfiehlt nicht allein diese Art der Zahlenversinnlichung, sondern meint auch, dass die Ausführung der vier Grundrechnungsarten mit Hilfe der Hände, d. i. mit

[1]) Lucas de Borgo, geb. zu San Sepolcro in Italien, eigentlich Luca Pacioli genannt, Minoritenmönch, später Lehrer der Mathematik in Neapel (1494), in Mailand (1496—99) und zuletzt in Venedig (1508).

Hosted by Google

diesen Handzeichen erleichtert wird, wenn man auch die Handgriffe der Arithmetik auswendig wisse.

Eine Anleitung zum Kopfrechnen mit Hilfe der Finger gab auch das deutsche Rechenbüchlein von Apianus[1]) aus dem Jahre 1532. Aus demselben bringen wir wörtlich das folgende Fragment:

„Ob aber einer so gar vngeschickt were | vnd die zal im sin zu behalten nit vermöcht | sol er die finger der linken handt | nach derselbigen zal | welche behalten sol werden | legen vnd heben. Darnach so er komet zu den andern figuren | sol er die zal | welche er im sin behalten nach anleytung der finger addiren."

Wir können umso sicherer den Schluss ziehen, dass noch im XVI. Jahrhunderte das Fingerrechnen theilweise im Gebrauche stand, wenn wir die Thatsache berücksichtigen, dass heutzutage noch in der Wallachei hin und wieder die Finger zur Ausrechnung von Producten, wenn die Factoren zwischen 5 und 10 liegen, benützt werden. Man verfährt bei Aufsuchung der Producte in folgender Weise:

Es erhalten die Finger einer jeden Hand der Reihe nach vom Daumen an gerechnet die Werte 6, 7, 8, 9, 10. Demnach gilt an jeder Hand der Daumen 6, der Zeigefinger 7 u. s. w.

1. Angenommen nun, man habe das Product zu suchen für 6×9. Berechnung: Man halte die Hände so, dass beide Daumen dem Körper zugewendet sind; nun über den Daumen (6) der einen Hand gelegt der Goldfinger (9) der andern Hand, die Anzahl der übrig bleibenden Finger gegen den kleinen Finger hin gerechnet (hier 1 Finger an der einen, und 4 Finger an der andern Hand), multipliciert, $1 \times 4 = 4$ E. Zu diesem Producte gibt man so viele Zehner, als Finger an beiden Händen zu dieser Multiplication nicht gebraucht wurden; d. i. $3 + 2$ Zehner $+ 4$ E $= 54$ E.

2. Ebenso für 8×9: Der Goldfinger der einen Hand auf dem Mittelfinger der andern Hand liegend, gibt $4 + 3$ Zehner $= 7$ Zehner, hiezu geben die übrig bleibenden Finger gegen den kleinen Finger hin gerechnet $1 \times 2 = 2$, also $7\,Z + 2\,E = 72$ E.

3. Liegt der Mittelfinger der einen Hand auf dem Zeigefinger der andern Hand, so bedeutet dies die Aufsuchung des Productes für 8×7, und man findet nach Früherem 5 Zehner und hiezu noch aus den übrig bleibenden Fingern 2×3 zusammen $56 = 8 \times 7$.

4. Die Mittelfinger aufeinander liegend ($= 8 \times 8$), gibt $4\,Z + 2\,Z$ und $2 \times 2\,E = 64$. (Die aufeinander liegenden oder anstossenden Finger geben immer 2 Zehner.)

Die älteste Nachricht aus dem Mittelalter über das Zählungssystem durch Fingerbeugungen findet man in der Handschrift des schottischen Mönches Beda (672—735), der sich durch seine bis zum Jahre 731 hinaufreichende Kirchengeschichte berühmt gemacht hat. Das Capitel über die Zeitrechnung leitet Beda mit folgenden Worten ein: „Wir hielten es für nöthig, erst in Kürze die überaus nützliche und stets bereite Geschicklichkeit der Fingerbeugungen zu zeigen, um dadurch eine möglichst große Leichtigkeit des Rechnens zu geben; dann, wenn der Geist des Lesers vorbereitet ist, wollen wir zur Untersuchung und Aufhellung der Reihe der Zeiten mittelst Rechnung kommen." Darauf lehrt Beda ausführlich, wie man von der linken

[1]) Apianus berühmt als mathematischer Geograph und Astronom, war 1524 Professor der Mathematik in Ingolstadt, † 1552 zu Ingolstadt.

Hosted by Google

Hand beginnend und zur rechten Hand fortschreitend die einzelnen Zahlen durch Fingerbeugungen darstellen soll. — An einer andern Stelle sagt Beda: „Der hl. Hieronymus (gest. 420) muss schon das Verfahren des Fingerrechnens gekannt haben, weil gewisse Andeutungen desselben nicht anders zu verstehen sind.“ Wir haben bereits auf S. 8 erwähnt, dass der Minoritenmönch Lucas de Borgo (eigentlich Luca Pacioli genannt), welcher zuletzt in den Jahren 1496—1508 die Mathematik in den Klosterschulen zu Mailand und Venedig lehrte, in seiner Schrift das Zählen an den Händen durch Fingerbeugungen nach Bedas Handschrift in nachfolgenden 36 bildlichen Darstellungen lehrte:

Finger-Numeration.

Darstellung nach Beda's Handschrift, Copie nach Lucas de Borgo.

a) An der linken Hand werden in Bewegung gesetzt:
Für die Einer der kleine Finger, Gold- und Mittelfinger,
„ „ Zehner der Daumen und Zeigefinger.

b) An der rechten Hand werden in Bewegung gesetzt:
Für die Hunderter die drei ersten Finger (wie bei den Einern),
„ „ Tausender der Daumen und Zeigefinger.

a) **Linke Hand für 9 Einer und 9 Zehner.**

1 Kleiner Finger gebogen.	**2** Kleiner Finger und Goldfinger gebogen.	**3** Kleiner Finger, Gold- und Mittelfinger gebogen.
4 Mittel- und Goldfinger gebogen.	**5** Mittelfinger gebogen.	**6** Goldfinger gebogen.
7 Kleiner Finger den Daumenballen berührend.	**8** Kleiner Finger und Goldfinger den Daumenballen berührend.	**9** Die drei ersten Finger den Daumenballen berührend.
10 Zeigefinger an das erste Glied des Daumens angesetzt.	**20** Daumenspitze zwischen Zeige- und Mittelfinger gelegt.	**30** Nägel des Daumens und Zeigefingers sich berührend.

Hosted by Google

40 Daumen mit der innern Seite an den Zeigefinger angeschlossen.	**50** Oberglied des Daumens allein gebogen.	**60** Daumen über den gebogenen Zeigefinger gelegt.
70 Zeigefinger über den gebogenen Daumen gelegt.	**80** Über den gestreckten Daumen den Zeigefinger gebeugt.	**90** An die Wurzel des Daumens den Zeigefinger angesetzt.

b) **Rechte Hand für 9 Hunderter und Tausender.**

100 Kleiner Finger gebogen.	**200** Kleiner Finger und Goldfinger gebogen.	**300** Die ersten drei Finger gebogen.
400 Mittel- und Goldfinger gebogen.	**500** Mittelfinger gebogen.	**600** Goldfinger gebogen.
700 Kleiner Finger den Daumenballen berührend.	**800** Kleiner Finger und Goldfinger den Daumenballen berührend.	**900** Die drei ersten Finger den Daumenballen berührend.
1000 Zeigefinger an das erste Glied des Daumens angesetzt.	**2000** Daumenspitze zwischen Zeige- und Mittelfinger gelegt.	**3000** Nägel des Daumens und Zeigefingers sich berührend.
4000 Daumen mit der innern Seite an den Zeigefinger angeschlossen.	**5000** Oberglied des Daumens gebogen.	**10.000** Linke Hand an der Brust anliegend.
100.000 Rechte Hand an der Brust anliegend.	**200.000** Rechte Hand in wagrechter Haltung an der Brust anliegend.	**1,000.000** Ineinanderlegung der Finger beider Hände über dem Kopfe.

Hosted by Google

In dem bereits auf S. 9 citierten deutschen Rechenbüchlein aus dem Jahre 1532 von Peter Apianus erwähnt derselbe bei der Erklärung des Addierens im Kopfe das Fingerrechnen und verspricht in einer von ihm herauszugebenden Schrift auch das Verfahren des Multiplicierens mit Hilfe der Fingerbeugungen zu bringen, indem er sagt: „Wie auch ein jetlich zal mit einer andern Zal durch die Finger beyder Hend sol multipliciret | dar durch auch die keuff im sinn gemachet werden | wirst inn meinem Centiloquio finden.“ Hiezu bringen wir noch den folgenden aus der Vorrede seines Rechenbüchleins entnommenen Satz: „Die Regulas Cosse mit sampt dem Centiloquio | darinne der kern ligt | wird ich in kürtzer zeit (wil Got) auch in druck geben.“ Diese von Apianus der Öffentlichkeit versprochene Schrift konnte ich nicht ausfindig machen, und es ist zweifelhaft, ob sie überhaupt jemals im Drucke erschien; denn zwei Jahrhunderte nach der Herausgabe des ersten Rechenbüchleins von Apianus sagt Jakob Leupold in seinem „Theatrum arithmetico-geometricum“ (Leipzig 1774 neu aufgelegt) auf S. 3 Folgendes: „Sonst findet sich wenig von der Fingerrechnung; es gedenket zwar Petrus Apianus in seinem teutschen Rechen-Buch, dass er in seinem Centiloquio gewiesen habe, wie mit den Fingern beyder Hände eine jegliche Zahl mit einer andern Zahl soll multiplicieret, und dadurch eine Rechnung oder Kauf im Sinn gemacht werden; ich habe aber solches Centiloquium zur Zeit noch nicht ansichtig werden können, wie sehr ich mich auch darum bemühet.“

Nach Bedas Finger-Numeration, die wir soeben in bildlicher Darstellung brachten, wurde in den Klosterschulen des Mittelalters bis in das XVI. Jahrhundert das Kopfrechnen mit Hilfe der Fingerbeugungen gelehrt, wie aus mehreren Schriften des XV. und XVI. Jahrhunderts zu entnehmen ist. Dass in keiner bisher bekannten Handschrift und in keinem Werke das eigentliche Verfahren des Fingerrechnens gelehrt wird, dürfte darin seinen Grund finden, weil eine derartige Anleitung, um verstanden zu werden, in Wort und Bild hätte gegeben werden müssen, welche Schwierigkeit jeden Verfasser sicher abschreckte. So blieb das Fingerrechnen allein dem mündlichen Anschauungsunterrichte vorbehalten, welches mit der allgemeinen Einführung des schriftlichen Rechnens nach dem indisch-arabischen Positions-Systeme, ähnlich wie das Rechnen auf dem Abacus, nach und nach verschwand, und mit der Zeit in gänzliche Vergessenheit kam. Einige noch heute vereinzelt angetroffene Überreste des Fingerrechnens bei den Rumänen (Wallachen) haben wir auf S. 9 bereits erwähnt.

In Apianus' Rechenbüchlein findet man beim Verfahren der im Kopfe zu verrichtenden Addition zehn Abbildungen von Fingerbeugungen der linken Hand, von welchen die ersten drei (für 1, 2, 3 S. 10) die gleichen wie bei

Hosted by Google

Beda sind; die andern sieben Handzahlen sind der Reihe nach die folgenden: Zur Handfläche eingeschlagene Finger mit allein gestrecktem Daumen (4); geballte Faust (5); allein gestreckter Zeigefinger mit den übrigen zur Handfläche gedrückten Fingern (6); u. s. w.

Wie Jakob Leupold in seinem Theatrum arithmetico-geometricum erwähnt, soll auch der Engländer Johann Belwer ein Buch geschrieben haben, in welchem die Finger-Numeration in 36 und die Händesprache (Manuloquium) in 72 Abbildungen vorkommen. Was speciell die Finger-Numeration betrifft, soll Belwer dieselben Fingerbeugungen, nicht aber auch die gleichen Hand-Dispositionen für die Zahlen wie Beda eingeführt haben.

Die Darstellung der Zahlen durch Strecken und Einbiegen der Finger gehört der frühesten Zeit des Alterthums an; doch ist nicht anzunehmen, dass in allen Zeiten und bei allen Völkern die gleiche Darstellungsweise der Zahlen durch Fingerbeugungen im Gebrauche stand. So dürften die einfachen römischen Zahlzeichen die Nachbildung einer von Bedas Handschrift abweichenden älteren Finger-Numeration nachweisen. Diese Ansicht findet für die Zeichen I, V und X in Mommsens römischer Geschichte ihre Bestätigung, wo diese Zahlzeichen als Nachbildungen von Finger- und Handpositionen angesehen werden (S. 14). Man hat C und M als die Anfangsbuchstaben der lateinischen Zahlennamen Centum (100) und Mille (1000) aufgefasst; doch die Zeichen für 50 = L, für 500 = IↃ oder D und für 1000 = CIↃ (älteres Zahlzeichen als M) fanden bezüglich ihrer Entstehung meines Wissens noch keine genügende Erklärung.

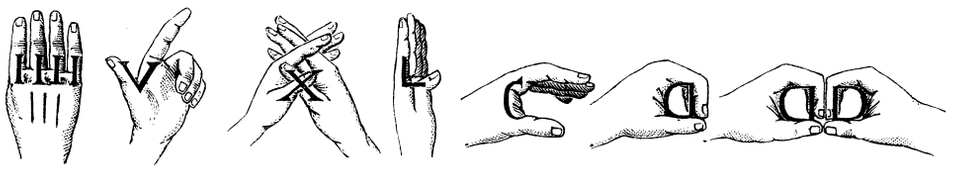
Da die Finger-Numeration dem Zahlenschreiben vorangieng, und nachdem die Römer niemals nach griechischem Muster die aufeinander folgenden Buchstaben des Alphabetes als Zahlzeichen verwendeten, so dürfte es mehr als wahrscheinlich sein, dass sie ebenso wie die ersteren Zahlzeichen I, II, III, IIII, V....X, auch die letzteren ältesten Zahlzeichen L = 50, IↃ = 500 und CIↃ = 1000 aus den Formen der Handpositionen der Finger-Numeration gebildet haben. Diese Annahme erscheint zum Theil auch dadurch begründet, dass die altrömischen Zahlzeichen für 50 und für 1000 waren.

Die Hälfte des Zeichens für 1000 gibt das dem römischen **D** ähnliche Zahlzeichen für 500 und das dem Buchstaben **L** ähnliche Zahlzeichen für 50 findet man noch als Urform in Bedas Finger-Numeration vertreten.

Die ältesten schriftlichen Zahlzeichen der Römer, die der plastischen Handzahlform nachgebildet wurden, zeigten zufällig eine Ähnlichkeit mit den römischen Buchstaben, weshalb es nicht zu vermeiden war, dass sie bald in die vollständige Buchstabenform übergiengen. Wird von der Form der sieben römischen Zahlzeichen umgekehrt auf die Handzahlformen der altrömischen Finger-Numeration geschlossen, so ergeben sich die

Hosted by Google

folgenden Hand- und Fingerpositionen für die Zahlen 4, 5, 10, 50, 100, 500 und 1000:



Bevor die Römer in vorchristlicher Zeit ihre Zahlformen aus den Handstellungen einer schon ausgebildeten Finger-Numeration entnahmen, pflegten sie die Zahlen in gleicher Weise wie andere Völker des Alterthums durch parallele Striche auszudrücken.

Hosted by Google

Zweiter Abschnitt.

Die Zahlzeichen und Zahlensysteme der alten Culturvölker.

Vorbemerkung.

Die Zahlzeichen der meisten alten Culturvölker und die Methoden, mit denselben möglichst viele Zahlen zu schreiben, waren höchst unbequem; gewöhnlich gebrauchten sie zur Zahlbezeichnung die Buchstaben ihrer Alphabete.

Die Bezeichnung der Zahlenwerte durch Striche kann man mit Recht ihrer Einfachheit wegen als einen der ältesten Schriftversuche zum Zwecke der Erinnerung an gewisse Zahlen ansehen. So macht noch heutzutage der Indianer an einem leicht bemerkbaren Baume jedesmal einen Stricheinschnitt, wenn er einen Scalp (Kopfhaut und Schopf des erlegten Feindes als Siegeszeichen) erbeutet hat. Auch bei den alten Deutschen und Slaven war eine ähnliche Zahlenbezeichnung durch gerade Einschnitte (eingeschnittene Striche) auf dem sogenannten Kerbholze üblich, welches aus zwei gleichgroßen kantigen Holzstäben bestand, von denen das eine für den Gläubiger, das andere für den Schuldner bestimmt war. War ein Posten zu notieren, so wurden beide Stäbe aneinander gelegt und gemeinschaftlich eingekerbt, damit später nach der Zahl der Kerbschnitte die Abrechnung vorgenommen werden konnte. Von dem ehemaligen Gebrauche des Kerbholzes stammt noch die Redensart: „Er hat viel auf dem Kerbholze“, wenn nämlich jemand viel gefehlt hat und seine Vergehen in dem Gedächtnisse des andern vorgemerkt sind, wie die Einschnitte auf dem Kerbholze oder Kerbstocke der Alten.

Es sind bisher nur wenige Decennien verflossen, seitdem das Kerbholz nicht mehr verwendet wird; denn in der ersten Hälfte des XIX. Jahrhunderts, als noch in den österreichischen Kronländern die landtäflichen Güter mit dem Rechte der Robot von Wirtschaftsbeamten verwaltet wurden — welche neben ihren Gehaltsbezügen in Geld auch mit Naturalien (Deputat) besoldet wurden — war noch das Kerbholz im Gebrauche. In dem Falle, wenn der

Hosted by Google

Güterverwalter das ihm gebürende Bier-Deputat in kleinen Quantitäten aus dem herrschaftlichen Bräuhause bezog, mit welchem gewöhnlich auch ein Bierausschank in Verbindung stand, wurde dem Verwalter auf das mitgesandte Kerbholz jede Halbe (= ½ Maß) Bier eingekerbt, wobei 80 Einkerbungen (Einschnitte) 40 Maß oder 1 Eimer bezeichneten. Wenn auf den beiderseitigen Einkerbungsflächen kein Raum mehr war, so wurden die Einkerbungen abgezählt und deren Quantum in Rechnung gestellt. Nun wurde für die Weiterführung der Rechnung entweder ein neues Kerbholz verwendet, oder man entfernte auf jeder Seite die alten Einkerbungen durch einen Spanabschnitt und benützte weiter aufs neue dasselbe Kerbholz.

Das in Rede stehende Kerbholz, welches die folgende Form hatte, war circa 40 *cm* lang, 3 *cm* breit und 1 *cm* dick.

Humbold führt in seiner besonderen Abhandlung „Über die bei verschiedenen Völkern üblichen Systeme von Zahlzeichen" mit Ausschluss des heutzutage üblichen Zahlensystemes, vier verschiedene Hauptarten an, nach welchen Zahlen bezeichnet werden können. Die erste Methode besteht in der bloßen Nebeneinanderstellung einiger einfachen Zeichen, wie bei den Tuskern, Römern, Griechen, Mexikanern und Ägyptern. Die zweite Methode ist die Vervielfachung und Verminderung des Wertes durch darüber und darunter gesetzte Zeichen, wie z. B. bei den griechischen Buchstabenzahlen. Die dritte Methode besteht in der Vervielfachung des Wertes durch Coëfficienten. Die vierte Methode benützt für die Vervielfältigung und Verminderung Abtheilungen von Zahlschichten, deren Wert sich in geometrischer Progression vermindert.

Da bei den meisten alten Culturvölkern die Schriftzeichen und Zahlzeichen im innigen Zusammenhange standen, so dürfte es an diesem Platze nicht ganz ohne Interesse sein, nachfolgend einige anschauliche Andeutungen einzuschalten, welche sich auf die Keilschrift der Babylonier und Perser, dann auf die Bilderschrift (Hieroglyphen) der Ägypter, und auf die eigenartige Wortzeichenschrift der Chinesen beziehen.

Wir beginnen nun nachfolgend mit den Grundzügen der Zahlzeichen und der Zahlensysteme der alten Culturvölker, nämlich der Babylonier, Perser, Ägypter, Griechen, Römer, Chinesen, Hebräer, Inder und Araber.

a) Keilschrift und Zahlenbezeichnung der Babylonier und Perser.

Die **Babylonier** und **Perser** bedienten sich zur Zahlenbezeichnung der Keilschrift, welche in Mesopotamien ihren Anfang nahm. Später ist die Keilschrift auch auf die armenische, medische und persische Sprache

Hosted by Google

angewendet worden. Die unter dem persischen Könige Darius entstandenen Keilinschriften sind sowohl in der assyrisch-babylonischen, als auch in der medischen und persischen Sprache abgefasst.

So wie die Chinesen von alter Zeit her Wörterbücher (Tse-tyan) für ihre Schriftzeichen haben, in welchen den chinesischen Wortzeichen die japanische Aussprache und Bedeutung beigesetzt ist; so wurde auch unter dem Könige Sardanapal V. ein aus Tafeln bestehendes Wörterbuch der Keilschrift mit akkadischer Aussprache und assyrischen Erklärungen angelegt, welches man in Ninive vorfand, und wodurch erst die volle Entzifferung der Keilschrift ermöglicht wurde. Auf einer dieser Tafeln fand sich eine Keilinschrift des Königs Sardanapal V., welche in der Übersetzung lautet:

„*Ich Sardanapal, König der Legionen, König von Assyrien, dem Nabo und Tasmet ausgiebige Ohren schenkten und geöffnet haben die Augen, um zu erkennen die Grundlagen der Herrschaft, die den Königen, welche vor mir waren, diese Schrift offenbart haben, in Verehrung Nabo's, des verbindenden Gottes, habe ich alle Zeichen, auch die geringsten, in zweifacher Schrift auf diese Tafel geschrieben, gezeichnet, geordnet und zum Unterrichte meiner Diener in meinem Palaste aufgestellt.*“

Eine von Nabukodonosor herrührende Keilinschrift zeigt die folgende Darstellung:

Assyrisch: *Nabo-kudurri-usur* (Nabukodonosor) *sar* (König) *bab-il-lu* (von Babylon)

za-nin (Erbauer) *bil-sag-ga-tu* (der Pyramide) *au* (und) *bit-zi-da* . . . . (des) Thurmes . . . .

„*Sohn des Nabopallassar, König von Babylon, ich sage: Ich habe erbaut den Palast, den Sitz meines Königthums, das Herz Babylons im Lande Babylon, ich habe seine Fundamente tief unter die Richtung (Niveau) des Flusses legen lassen, ich habe erwähnt seine Errichtung auf den mit Ziegeln bedeckten Gliedern, mit deiner Hilfe, o Gott Merodas, du Erhabener, habe ich diesen unzerstörbaren Palast erbaut, dass der Gott herrsche in Babylon, welches er sich zu seinem Sitze auserwählt hat, dem er versiebenfachte die Zahl seiner Geburten, dann wird durch mich Babylon herrschen bis zu den jüngsten Tagen.*“

Die assyrisch-babylonische Keilschrift hat in der Zusammenstellung der Keile sowohl stabile Silben als Wortzeichen.

Hosted by Google

Die medische Keilschrift ist aus der assyrischen hervorgegangen, sie ist einfacher und vermeidet die Durchkreuzung der Keilzeichen. Diese Schrift dürfte auf Grund der herrschenden Ansicht nach der Eroberung Ninives im Jahre 625 vor Chr. entstanden sein.

Einen ganz anderen Charakter als die assyrische und medische hat die persische Keilschrift; sie ist nämlich eine Buchstaben- und keine Silbenschrift; hierbei werden die Wörter stets durch einen schief stehenden Keil getrennt. So z. B.:

Ba-ga *ra-z-ra-ka.*
Gott der große.

Zahlenbezeichnung der Babylonier und Perser.

Die Babylonier bezeichneten die ersten neun Einheiten durch keilförmige, der Keilschrift entnommene Striche, welche entweder nebeneinander, oder untereinander gesetzt wurden; so z. B.: = **2**. Für **10** gebrauchten sie einen nach links zugespitzten Winkelhaken, nämlich . Vielfache von **10** wurden durch wiederholtes Setzen des Winkelhakens bezeichnet; so z. B. bedeutete 30.

Hatten Vielfache von Zehn noch Einheiten bei sich, so wurden diese den Zehnern rechts angesetzt; demnach bedeutete 23. Die Zahl **100** wurde durch zwei Zeichen, nämlich durch einen senkrechten und durch einen zweiten rechts stehenden wagrechten Keil ausgedrückt. Z. B. = 100; = 103. Mehrere Hunderte wurden in der Multiplicationsform ausgedrückt, indem man links vor das einfache Zeichen für ein Hundert so viele Einheiten setzte, als Hunderte angegeben werden sollten. So z. B. wurden 300 ausgedrückt durch das Zeichen . Um **1000** darzustellen, wurde das Zehnerzeichen dem Hundertzeichen links vorgesetzt. Vielfache von Tausend wurden in ähnlicher Weise wie mehrere Hunderte multiplicativ angezeigt.

Diese Zahlenschreibmethode war eine sehr schwerfällige und weitläufige. Für das Rechnen musste sie offenbar sehr unbequem erscheinen; weshalb mit Grund angenommen werden kann, dass sich die Babylonier irgend einer mechanischen Vorrichtung (Rechenmaschine oder Rechenbrettes) bedienten. Aus dem, was uns über die Numeration der Babylonier bekannt ist, geht mit Gewissheit hervor, dass sie, wie die meisten östlichen Culturvölker, das Zehnersystem gebrauchten.

Hosted by Google

Die zur Keilschrift gehörigen Zahlen der Babylonier finden sich theils eingegraben auf Felswänden, Obelisken, Statuen, Gebäuderesten, theils eingedruckt auf Thonplatten und Thongefäßen. Fundorte sind vorzüglich die Ruinen von Persepolis, Babylon, Ninive und die anderen Hauptstädte des altpersischen Reiches. In Europa wurde die Keilschrift erst gegen das Ende des XVII. Jahrhunderts bekannt. Nach der Annahme der Geschichtsforscher soll die Keilschrift schon 2000 Jahre v. Chr. im Gebrauche gewesen sein, ihre wissenschaftliche Erforschung begann in Deutschland F. Grotefend 1802, welcher einige Königsnamen entzifferte. (Lassen, die Keilschrift von Persepolis, Bonn 1836.)

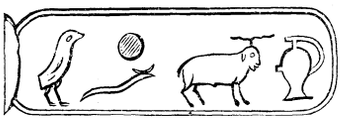
Die Perser hatten das Zehnersystem und bezeichneten in Keilschrift die Zahlen mit einigen Abweichungen von 50 angefangen wie die Babylonier.

b) Hieroglyphische, hieratische und demotische Schrift der Ägypter und deren Zahlenbezeichnung.

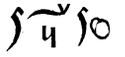
Ägypter. Auf den ältesten ägyptischen Denkmälern, in den Pyramiden von Gizeh, welche vor 6000 Jahren errichtet wurden, findet man sowohl eine zweifache Form der Schrift, als auch eine zweifache Form der Zahlenbezeichnung, nämlich die künstlerisch ausgeführten Bildzeichen, welche die Griechen „Hieroglyphen“ (heilige Eingrabungen) nannten, und jene flüchtig gemalten Zeichen, welche sie „hieratische“ (Priesterschrift) hießen. Zur Unterscheidung folgen hier zwei Namensschilde des Königs Khufu, des Erbauers der größten Pyramide von Gizeh, von denen das eine (1) mit rother Farbe gemalt ist, während das andere (2) vom Bildhauer in Hieroglyphen hergestellt wurde.

1.

2.



Die vielschreibenden ägyptischen Priester hatten die unter (1) gemalten Schriftzeichen in noch flüchtigere Formen vereinfacht; so wurde für den in (1) dargestellten Königsnamen Khufu nach den hieratischen Lettern geschrieben:



Die ägyptischen Hieroglyphen haben eine auffallende Ähnlichkeit mit der alten Bilderschrift der Chinesen.

Die Ägypter schrieben theils von rechts nach links, theils umgekehrt von links nach rechts; die erstere Schreibweise dürfte die ältere sein, sie ist auch in der hieratischen Schrift beibehalten. In welcher Richtung die Hieroglyphen zu lesen sind, erkennt man aus den Bildern; man liest nämlich der Richtung der bildlichen Gesichter entgegen. Die obigen Inschriften laufen von rechts nach links.

Hosted by Google

Diese Namensschilder haben zuerst zur Erklärung und zum Lesen der Hieroglyphen geführt. Champollion hatte die begründete Vermuthung, dass in den umklammerten Namen in der Inschrift eines Obelisken die Namen des Ptolemaios (Ptolemaiis)[1]) und der Kleopatra enthalten sein müssten. Er machte demnach eine vergleichende Untersuchung der folgenden zwei Namensschilder (3) und (4) und kam zu dem Resultate:

3. 4.

müsse *K* sein, welches in dem Namen Ptolemaios nicht vorkommt.

musste *L* sein, weil es sich auch bei PTOLemaios an der vierten Stelle vorfand.

 konnte nur *E* sein, denn es fand sich verdoppelt da, wo man das griechische *αι* zu suchen hatte.

musste *O* sein, denn dieses Zeichen fand sich, wie zu erwarten war, auch als dritter Buchstabe in PTOLemaios.

 konnte nur *P* bedeuten, weil es in Ptolemaios an der ersten und in KLEOPatra an der fünften Stelle vorgefunden wurde.

musste *A* sein, denn es fand sich an der letzten Stelle in Kleopatra wieder.

(Hand) musste als *T* ausgesprochen werden im Namen Kleopatra[2]).

(Mund) bedeutete *R*, obgleich in Ptolemaios nicht vorkommend.

So blieb kein Laut in Kleopatra unerwiesen, während in Ptolemaios das fünfte und achte Zeichen noch einer Bestätigung bedurften, wenngleich das fünfte Zeichen ( ) nur ein *M*, das achte nur ein *S* sein konnte.

Während die Hieroglyphen zur Beschreibung der Tempelwände und Monumente dienten, gebrauchten die ägyptischen Priester zu ihren Aufzeich-

---

[1]) Unter den Ptolemäern, welche in den letzten drei Jahrhunderten v. Chr. in Ägypten regierten, wurde trotz Schonung der altägyptischen Religion die griechische Sprache Hofsprache, und Alexandrien ein Hauptsitz griechischer Wissenschaft. Aus dieser Zeit stammen Inschriften, welche doppelsprachig, d. h. in griechischer und ägyptischer Fassung sind. Auch die ersten römischen Imperatoren schützten die ägyptische Religion, und auch ihre Namen findet man in hieroglyphischen Weih-Inschriften.

[2]) Da sich im Namen Ptolemaios ein anderes Zeichen für *T*, nämlich der Halbkreis vorfand, so hätte der Entzifferer der Hieroglyphe in dieser Vergleichung leicht irre geführt werden können, wenn er nicht die Möglichkeit, dass ein Laut durch verschiedene Zeichen ausgedrückt werden könne, sich in Erinnerung gebracht hätte, und wenn er nicht weiter richtig geschlossen hätte, dass der Halbkreis am Ende des Namens der berühmten Königin, den er auch am Schluss bei anderen Frauennamen fand, den weiblichen Artikel *T* darzustellen bestimmt sei und ebenso ausgesprochen werde, wie das Zeichen der Hand an der siebenten Stelle in KLEOPA(T)RA.

Hosted by Google

nungen die schon erwähnte einfachere hieratische Schrift, welche nur sie allein verstanden. Dem entsprechend gab es auch eine doppelte Zahlenbezeichnung, nämlich eine hieroglyphische und eine hieratische. Aus der hieratischen Schrift entwickelten sich allmählich die demotische, d. i. die Volksschrift, und die demotischen Zahlzeichen. Die ägyptischen Jünglinge mussten nach Erlernung der demotischen Schreibweise auch die hieratische und die Hieroglyphen lernen. Zur Veranschaulichung der drei Schriftarten folgen hier einige Muster:

	Hiero-glyphisch	Hiera-tisch	Demotisch	Lautwert
1.				*a.*
2.				*aeo.*
3.				*m.*
4.				*n.*
5.				*r* und *l.*
6.				*r.*
7.				*Gott.*
8.				*Göttin.*
9.				*Mond.*
10.				*Monat.*
11.				*Haar.*
12.				*Stadt.*
13.				*Land.*
14.				*sprechen.*
15.				*gehen.*

Das Zeichen unter 4 bezeichnete auch „Welle“; wiederholt unter einander gesetzt war es das Zeichen für „Wasser“.

Hosted by Google

α) Hieroglyphische Zahlenbezeichnung der Ägypter.

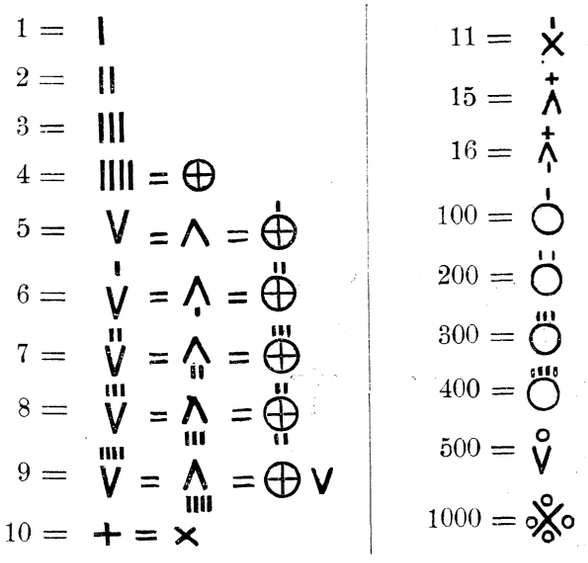
Aus der hieroglyphischen Zahlenbezeichnung wollen wir beispielsweise erwähnen: Die Hieroglyphe für **1** war eine Messstange; die Hieroglyphe für **5** war eine Taube, weil sie nur fünf Eier legt; die Hieroglyphe für **7** war ein Hahn, weil er des Morgens siebenmal kräht; für **10** ein mit zwei parallelen und verbundenen Geraden bezeichnetes Hufeisen[1]). Die Hieroglyphe für **100** war ein zusammengerolltes Palmblatt (einem Krummstabe ähnlich); die für **1000** eine Lotosblume als das Sinnbild der Fülle; für **10.000** ein Finger; für 1 Million ein Frosch (der bei den Überschwemmungen durch den Nil in zahlloser Menge zum Vorschein kam). — Vielfache der Zahlen: Zehn, Hundert und Tausend wurden wie bei den Babyloniern durch wiederholtes Setzen derselben in leicht übersichtlichen Gruppen zu höchstens je vier vereinten Zeichen dargestellt.

β) Die beim Rechnen gebrauchten Zahlzeichen der Ägypter.

Beim Rechnen gebrauchten die Ägypter nicht die hieroglyphischen Zahlenbilder, sondern die folgenden Zahlzeichen: welche der Reihe nach die Werte hatten: 1, 4, 5, 10, 100.

(Aritmetica delle nazioni del Lorenzo Hervas 1786.)

Die höchst einfache Bildung aller Zahlen aus den obigen fünf Zeichen wird leicht ersichtlich in der nachstehenden Zusammenstellung:



[1]) Bunsen (Ägyptens Stellung in der Weltgeschichte, IV., S. 98) hält die Hieroglyphe ⌒ für die Darstellung der Zahl 10 als eine Bezeichnung zweier an den Gelenken verbundenen und parallel neben einander herunter hängenden Hände.

Hosted by Google

c) Zahlenbezeichnung der Griechen nach ihrem Alphabete.

Die **Griechen** bedienten sich ihres Alphabets zur Zahlenbezeichnung derart, dass sie die neun Einheiten, neun Zehner und neun Hunderte durch die Form ihrer Buchstaben in der Reihenfolge des Alphabets ausdrückten. Da hiefür 27 Zeichen gehörten, und das griechische Alphabet nur 24 Lautzeichen zählte, so musste man drei neue Zeichen für die Zahlen aufstellen, welche an verschiedenen Stellen dem Alphabete eingefügt wurden. So wurden die betreffenden Zahlzeichen für 6 (*Stigma*) zwischen ε und ζ; für 90 (*Koppa*) zwischen π und ϱ und für 900 (*Sampi*) am Ende des Alphabets als eingestellt angenommen. — Für die Tausender fiengen sie das Alphabet wieder von vorne an und drückten den 1000fachen Wert durch einen kleinen unter den Buchstaben gesetzten Strich aus. Hiebei giengen sie aber nur bis 9000 = $\dot{\vartheta}$. Die Zehntausende, genannt „Myrias", bezeichneten sie durch den ersten oder durch die zwei ersten Buchstaben dieses Zahlwortes, nämlich: M oder Mv = 10.000. Die Vielfachen von 10.000 (Myrias) wurden derart ausgedrückt, dass man den Multiplicator vor, nach oder über 10.000 (M oder Mv) setzte. So z. B.: 20.000 oder 2 Myrias = $\beta Mv = Mv\beta$ (oder $\beta M = M\beta = \overset{\beta}{M}$); 30.000 = $\gamma Mv = Mv\gamma = \overset{\gamma}{M}$. Eine Million oder 100mal 1 Myrias (100 × 10.000) bezeichnete man durch $\varrho Mv = Mv\varrho = \overset{\varrho}{M}$ u. s. w. bis 9999 Myrias. Noch höhere Zahlen wurden als Potenzen und Vielfache von 1 Myrias aufgefasst. So z. B. 100,000.000 = 10.000^2; 1 Billion = 10.000^3. Man theilte hiebei große Zahlenwerte in Gruppen zu je 4 Ziffern (aufgefasst nach unserer Darstellungsweise) ein, und gab ihnen auch besondere Namen.

Nach dem Gesagten ergibt sich für die Zahlenbezeichnung das folgende Schema:

α,	β,	γ,	δ,	ε,	ς,	ζ,	η,	ϑ,	ι,	$\varkappa$,	λ,	μ,	ν,	ξ,	o,	π,	...	ϱ,
1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	20,	30,	40,	50,	60,	70,	80,	90,	100,

σ,	τ,	υ,	φ,	χ,	ψ,	ω,	...
200,	300,	400,	500,	600,	700,	800,	900.

$\dot{\alpha}$	$\dot{\beta}$	$\dot{\gamma}$ ... u. s. w. bis $\dot{\vartheta}$,	$\underbrace{M \text{ od. } Mv}$,	$\underbrace{\overset{\beta}{M} \text{ od. } \beta M \ (\beta Mv \text{ od. } Mv\beta)}$
1000,	2000,	3000 9000,	10.000	20.000 = 2 Myrias,

$\gamma M = \overset{\gamma}{M}$; δM u. s. w.
30.000 40.000.

Demnach bedeuten nach unserem Zahlensysteme:

ι = 10; $\iota\varepsilon$ = 15; $\lambda\xi$ = 37; $\varrho\varkappa\beta$ = 122; $\upsilon\pi\eta$ = 488; $\dot{\alpha}\varphi\iota\varepsilon$ = 1515; $\dot{\varepsilon}\sigma\pi$ = 5280; $\dot{\vartheta}\omega\mu\gamma$ = 9843; $\dot{\alpha}\tau\varkappa\varepsilon$ = 1325.

Hosted by Google

Nach dem griechischen Zahlenschreib-Systeme durch Gruppentheilung erhält man für die Zahl:

$$5{,}601.052{,}800.000 =$$

5	6010	5280	$\underbrace{0000}$
dreifache Myr. $M\gamma$	zweifache Myr. $M\beta$	einfache Myraden $M\alpha$	Monaden.

$$= 5.10000^3 + 6010.10000^2 + 5280.10000 \text{ die}$$

Bezeichnung $M\gamma.\overline{\varepsilon}$, $M\beta.\overline{\varsigma\iota}$, $M\alpha.\,\xi\sigma\pi$.

Das $M\upsilon$ wurde oft auch weggelassen; so schrieb Diophantes für die Zahl 1,270.568 oder 127|0568 $\overline{\varrho\varkappa\xi}.\varphi\xi\eta$ statt $\overset{\alpha}{M}\varrho\varkappa\xi.\varphi\xi\eta$, d. h. 127 Myriaden 568 Einheiten.

Die horizontalen Striche über den Buchstaben bezeichneten ihren erhöhten Zahlenwert.

Beim Anschreiben der Brüche wurden die Stammbrüche von den abgeleiteten Brüchen unterschieden. Bei Stammbrüchen schrieb man nur die Nenner mit einem rechts oben beigesetzten Strichlein; so z. B.: $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$ . . . . . $= \gamma'$; δ'; ε' . . . . (für $\frac{1}{2}$ hatte man ein eigenes Zeichen).

Abgeleitete Brüche wurden derart bezeichnet, dass man zuerst den Zähler unter den Bruchstrich und den Nenner oberhalb mit einem Circumflex schrieb, als:

$$\frac{8}{3'3} = \frac{\lambda\tilde{\gamma}}{\eta} \qquad \frac{4\,2}{8\,4'5} = \frac{\omega\mu\tilde{\varepsilon}}{\mu\beta}$$

Noch eine zweite der römischen ähnliche Zahlenbezeichnung haben die Griechen benützt, indem sie die Anfangsbuchstaben gewisser Zahlwörter zum Zahlenanschreiben verwendeten, nämlich:

$I = 1$; $\Pi = 5$ (pente); $\Delta = 10$ (deka); $H = 100$ (hekaton); $X = 1000$ (chilioi); $M = 10.000$ (Myrioi).

Zahlen unter und über 5 wurden additiv durch Wiederholung der entsprechenden Zahlzeichen ausgedrückt. Das 5fache der Zahlen hat man durch Multiplication mit 5 in der Form eines unten offenen Viereckes ausgedrückt, nämlich: $\Delta = 10$, $|\overline{\Delta}| = 50$; $H = 100$, $|\overline{H}| = 500$ (Cantor S. 112, Nesselmann, 81).

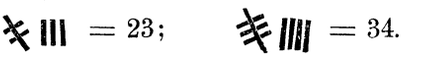
Demnach bedeuten: $\Delta\Pi = 15$; $\Delta\Delta\Delta I = 31$; $HH\Delta = 210$; $HHH|\overline{\Delta}|\Pi\Pi I = 357$; $X|\overline{H}|HH\Delta\Pi I = 1716$; $MM|\overline{X}|XX|\overline{H}|H\Pi = 27.605$; $|\overline{M}|MM = 70.000$.

d) Zahlenbezeichnung der Römer.

Die **Römer** hatten, wie bekannt, sieben einfache Zahlzeichen: I für 1, V für 5, X für 10, L für 50, C für 100, IↃ oder D für 500, CIↃ oder M für 1000. Mommsen erklärt in seiner römischen Geschichte die Zahlzeichen I, V, X für Nachbildungen der ausgestreckten Finger der offenen und der doppelten Hand. C und M werden am einfachsten als die Anfangsbuchstaben der gleichgeltenden Zahlwörter aufgefasst.

Hosted by Google

Die ältere Schreibweise der Zahl Zehn ist auch ein stehendes Kreuz, nämlich +. Da sich die Zahlzeichen + oder × für 10 auch bei den alten Ägyptern (S. 22) vorfinden, so dürften die Römer die Zahlbezeichnung für 5 (V oder Λ) und 10 von den Ägyptern gelernt haben. — In alten römischen Schriften und auf Denksteinen werden auch Doppelkreuze für 20 und dreifache Kreuze für 30 vorgefunden. So z. B.:

 = 23; = 34.

Da die Römer einheitliche Zeichen für 5, 50, 500 hatten, so brauchten sie die nächsten niederen höchstens 4mal zu setzen, um die diesbezüglichen höheren oder niedrigeren Zahlen bis zu 1000 darzustellen. Z. B.: 4 = IIII; XXVII = 27; DCCC = 800; während diese Zahlenbezeichnungen als Summen zu betrachten sind, stellen wieder andere Differenzen dar mit voranstehenden Subtrahenden. So sind IX = 10 — 1 = 9; XL = 50 — 10 = 40; CD = 500 — 100 oder 400.

Mehrere Tausender wurden ausgedrückt durch wiederholtes Setzen des Tausender-Zeichens, so MM = CIↃCIↃ, oder man stellte die Zahl als ein angezeigtes Product dar, indem man den Multiplicator vor das Tausend-Zeichen schrieb. Z. B.: VIM = 6000, LM = 50.000. Auch konnte man mit 10, 100 etc. multiplicieren, indem man dem Tausendzahl-Zeichen CIↃ je ein neues Bogenzeichen (C) links und rechts beifügte, so z. B.: CCIↃↃ = 10.000, CC CIↃ ↃↃ = 100.000; dieses Verfahren fand natürlich wegen der weitläufigen Bezeichnungsart bald seinen Abschluss. Eine weitere verkürzte Zahlenbezeichnung durch Multiplication einer Zahl mit 1000 und 10.000 war die folgende: Ein wagrechter Strich über einer Zahl bedeutete ihr 1000faches Product; hingegen eine in ein unten offenes Viereck eingeschlossene Zahl bezeichnete ihr 100.000faches Product. So z. B.:

$\overline{X}$ = 10.000; $\overline{L}$ = 50.000; $\overline{CC}$ = 200.000; $|\overline{X}|$ = 10mal 100 Tausend = 1,000.000; $|\overline{XV}|$ = 15 × 100 Taus. od. 15,000.000; $|\overline{M}|$ = 1000 × 100 Taus.

Die römische Zahlenanschreibung zeigte sich als eine schwankende und weitläufige, und wegen der lästigen Wiederholung von *Mille* (Tausender) bei großen Zahlen war auch das Zahlenlesen ein schleppendes und schwerfälliges.

Im Mittelalter hat man in Deutschland nicht selten die Jahreszahlen durch die Buchstaben der deutschen Fracturschrift nach der römischen Methode des Zahlenanschreibens bezeichnet; so findet man an dem ältest datierten, roh ausgeführten Holzschnitte eines deutschen Meisters (die Geißelung Christi vorstellend), welches Octavbildchen sich im Kupferstichcabinete des Berliner Museums befindet, die Jahreszahl

MCCCCXLIII (1443)

angebracht.

Hosted by Google

e) Schriftzeichen und Zahlenbezeichnung der Chinesen.

Vorbemerkung.

Da die **Chinesen** in ihrer Sprache kein Alphabet haben, sondern für jedes Wort ein eigenes Zeichen verwenden, so konnten sie nicht, wie die anderen Völker, Buchstaben zur Zahlenbezeichnung gebrauchen. Die chinesische Schrift, welche in uralter Zeit, ähnlich wie bei den Ägyptern, eine Bilderschrift war, wird von oben nach abwärts in Zeilen geschrieben, welche von rechts nach links gebildet werden. Das unter dem Kaiser Kain-hi 1716 herausgegebene Wörterbuch Tse-tyan (Gesetz der Zeichen), welches gegenwärtig noch für alle amtlichen Schriften maßgebend ist, enthält 42.000 erklärte Schriftzeichen; doch mangeln in demselben die Zeichen für die technischen Ausdrücke der Gewerbe, sowie jene des Schöngeistigen. Die Wortbilder der chinesischen Sprache sollen nahezu die Zahl 60.000 erreicht haben.

Die Erlernung der chinesischen Schrift geschieht in der Jugend nach Art unserer Fibeln. Die Chinesen haben nämlich in ihren Schulen Elementarbücher eingeführt, nach welchen den Schülern das Lesen der chinesischen Zeichen für jene Worte, welche in der gewöhnlichen Umgangssprache am häufigsten vorkommen, gelehrt wird. Man beginnt vorerst mit jenen Wortzeichen für Substantive, deren Laute den Kindern bereits aus unmittelbarer Anschauung bekannt sind, und erweitert das Lesen nach und nach an schwierigeren Begriffswörtern, worauf zu den ersten Schriftübungen der Wortzeichen übergegangen wird. So z. B. beginnt man an der chinesischen Fibel mit dem Lesen von oben nach unten folgender Worte:

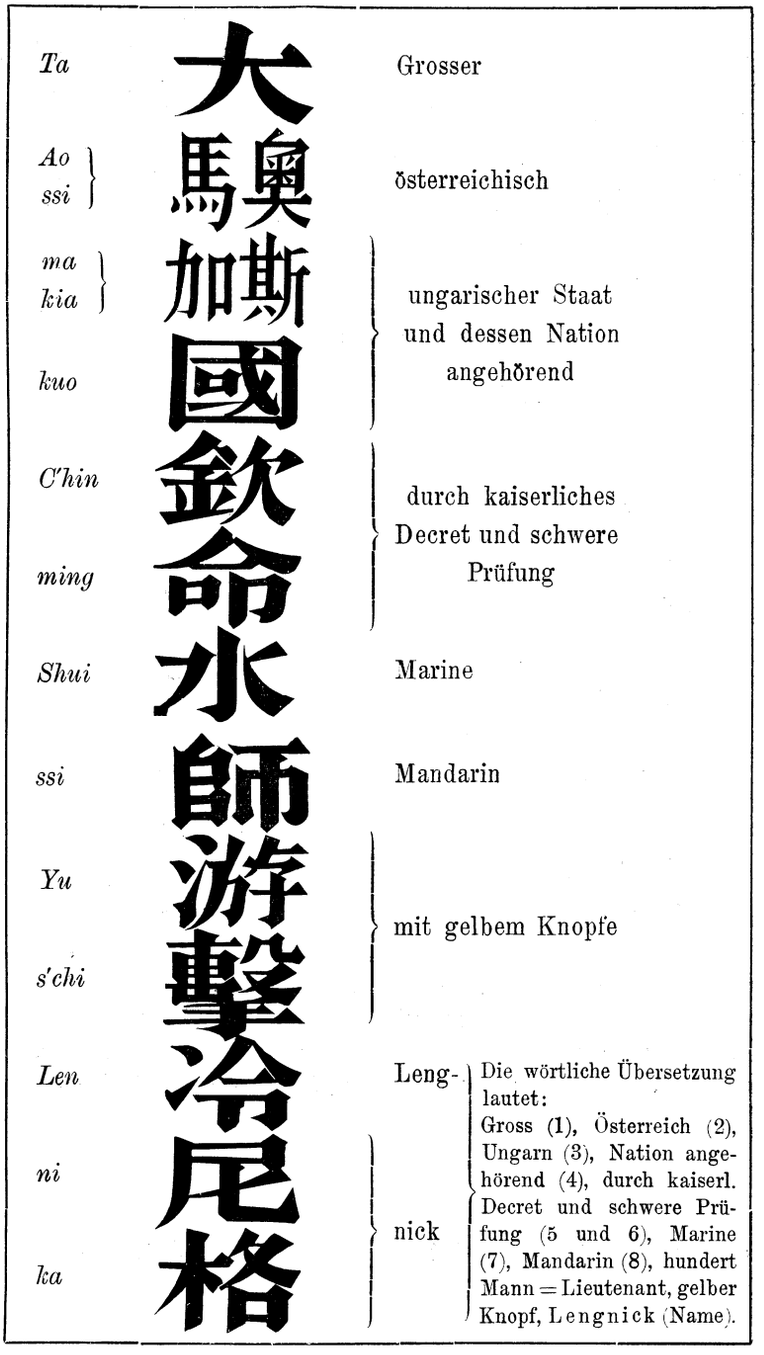
Fú (Vater) = 父 | *Tsè* (Sohn) = 子

Mú (Mutter) = 母 | *Schiùj* (Wasser) = 水

Wir bringen als Beispiel zu der chinesischen Wortzeichen-Schrift die Copie vom Originale der auf rothem Papier gedruckten chinesischen Visitkarte, welche vom Schiffsstabe des der k. und k. österreichischen Kriegsmarine angehörenden Schiffes „Zrinyi“, während der Mission im Jahre 1890 in Ostasien bei allen officiellen Besuchen in China nach Landessitte als Anmeldung benützt wurde, und die nebst den jeweilig gebürenden Titeln am Schlusse den ins Chinesische übertragenen Namen ihres Besitzers enthält.

Die deutsche Übersetzung des amtlich vorgeschriebenen Textes dieser in der Original-Wortzeichengröße gedruckten Visitkarte lautet, wie folgt:

Hosted by Google



Hosted by Google

Zahlenbezeichnung der Chinesen.

Die Chinesen sollen schon 2000 Jahre vor Chr. besondere Zeichen für die neun ersten Einheiten, ferner für 10, 100, 1000 und 10.000, sowie für höhere Potenzen von 10 gehabt haben. Die Zahlen werden von den Chinesen in der Richtung ihrer Wortschrift von oben nach unten geschrieben.

Bei den zur älteren Numerationsmethode gehörigen Zahlzeichen, welche die Chinesen „*Kyaï*“ nennen, werden die über dem Zahlzeichen für Zehn (+) gestellten Einheiten multiplicativ, die unterstellten Einheiten additiv genommen. Z. B.:

$$\overset{2}{10} = 20;\ \underset{2}{10} = 12;\ \left.\begin{matrix}\overset{5}{10}\\ \underset{3}{10}\end{matrix}\right\} = 53.$$

Nach den *Kyaï*-Zahlzeichen werden geschrieben:

1 = 一
2 = 二 oder 𝍦
3 = 三 oder 𝍧
4 = 四
5 = 𝍨
6 = 𝍩
7 = 七
8 = 八
9 = 九
10 = 十

11 = 十一
20 = 二十
50 = 五十
90 = 九十
100 = 百
1000 = 千
10.000 = 萬

Um z. B. 6392 Jahre zu schreiben, macht man beim Schreiben vier Gruppen, man schreibt nämlich zuerst das Zeichen für 6, darunter das Zeichen für 1000; weiter 3 mit dem unterstellten Hundertzeichen; dann 9 und darunter das Zehnerzeichen mit unterhalb gestellten 2 und schließlich das Wortzeichen für „Jahre“, als:

六千
三百
九十
二年

Gelesen: 6mal 1000, 3mal 100, 9mal 10 und 2 Jahre.

Bei der Zahlenschreibung und beim Rechnen nach dem dekadischen Zahlensysteme gebrauchen chinesische Kaufleute die folgenden Zahlzeichen:

Hosted by Google

1 =	6 =
2 =	7 =
3 =	8 =
4 =	9 =
5 =	0 =

Diese Zahlzeichen, welche die Chinesen heutzutage noch gebrauchen, erwähnt Biot in seiner Reisebeschreibung von Asien; er hatte dieselben einem bereits zwischen 700 und 1000 nach Chr. gedruckten chinesischen Werke entnommen.

Der Zeitpunkt, in welchem die Chinesen mit der Nulle bekannt wurden, ist bisher noch nicht genau ermittelt worden.

Die Thatsache, dass die Arithmetik bei den Chinesen nachweisbar älter als bei den Indern ist, und dass jene schon 2000 Jahre vor Chr. eigene Zahlzeichen (Ziffern) hatten, während die Inder viel später die Buchstaben ihres Alphabets zur Zahlenbezeichnung gebrauchten und erst nach und nach mit besonderen Zahlzeichen oder Ziffern zu rechnen begannen; sowie die auffallende Ähnlichkeit von einigen alten indisch-arabischen Ziffern mit den alten Ziffern der Chinesen, und noch andere Gründe, haben schon gegen das Ende des vorigen Jahrhunderts zu der Vermuthung geführt, dass unsere sogenannten arabischen Ziffern nicht von den Indern, sondern von den Chinesen stammen, von welchen die Inder im Wege des Geschäftsverkehrs sie erlernten. (Fundgrube des Orients, Wien 1811, 2. Band, S. 40.)

f) Zahlenbezeichnung der Hebräer.

Die **Hebräer** gebrauchten zur Zahlenbezeichnung die Reihenfolge der Buchstaben ihres Alphabets in folgender Weise:

a) Für die 9 ersten Zahlen:	א, ב, ג, ד, ה, ו, ז, ח, ט	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
b) Für die 9 Zehner:	י, כ, ל, מ, נ, ס, ע, פ, צ	10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90
c) Die ersten vier Hunderte:	ק, ר, ש, ת	100, 200, 300, 400

Die Zahlen 500—900 werden entweder durch die fünf Endbuchstaben, oder durch Hinzufügung der Hunderter zu ת = 400 bezeichnet. Demnach bedeuten die Zeichen ר oder תק = 500; ם oder תר = 600; ן oder תש = 700; ף oder תת = 800; ץ = 900.

Um die „Tausender“ darzustellen, wird das Alphabet wieder von vorne angefangen, wobei über jeden Buchstaben zwei Punkte gesetzt werden. So z. B.: א״ = 1000, ב״ = 2000, ג״ = 3000.

Hosted by Google

Bei den aus Zehnern und Einern zusammengesetzten Zahlen steht immer die größere voraus, nur 15 und 16 machen eine Ausnahme, weil יה = 15 und יו = 16, Theile des Gottesnamens יהוה (Jehova) sind, weshalb die Zahlen additiv durch 9 und 6, beziehungsweise 9 und 7 gebildet werden.

Demnach bezeichnen: יא = 11, יב = 12, ... טו = 15, טז = 16, ... כה = 25, . . . נב = 52 u. s. w.

g) Zahlenbezeichnung der alten Inder und Araber.

Die **Inder** gebrauchten bis in die ersten Jahrhunderte unserer Zeitrechnung, ähnlich wie die semitischen Völker und die Griechen, zur Zahlenbezeichnung die Buchstaben ihres Alphabets. Mit den 25 Consonanten schrieben sie der Reihe nach die Zahlen von 1 bis 25, mit den Vocalen und Sibilanten bezeichneten sie 30, 40, 50—100. Um größere Zahlen anschreiben zu können, gebrauchten sie die Vocale als Factoren; so multiplicierte der erste Vocal den Wert des Consonanten, vor welchem er stand, mit 100; der zweite mit 100^2, der dritte mit 100^3 u. s. w. Nebeneinander gestellte Consonanten wurden als additiv angesehen. Da die Inder für die Potenzen von 10 besondere Zahlennamen hatten, so war das Zahlenlesen viel einfacher als bei den Griechen und Römern. (Lassen's Zeitschrift für Kunde des Morgenlandes, II. Bd.)

Über die älteste indische Zahlenschreibweise bringt Webers Jahrbuch der deutsch-orient. Gesellschaft, Bd. XV, S. 132, Folgendes:

Auf Grund der Zahlenbezeichnung, die nach alten indischen Münzen und Inschriften zusammengestellt wurde, lässt sich annehmen, dass die Inder die ersten drei Einheiten durch ebenso viele senkrechte Striche, die übrigen aufeinander folgenden Zahlen aber reihenweise nach Ordnung des Alphabets durch Buchstaben ausgedrückt haben, und zwar gebrauchten sie von denselben die ersten sechs für die Einheiten 4 bis incl. 9, die nächsten neun Buchstaben benützten sie für die neun Zehner, und mit den darauffolgenden weiteren neun Buchstaben wurde die Reihe der Hunderte bezeichnet. Da für die höheren Potenzen von 10 die Inder besondere Namen gebrauchten, so hatten sie hiefür auch besondere Zahlzeichen, wie es mitunter die ungeheuren, in ihren religiösen Schriften vorkommenden Zahlen beweisen. Diese Art Numeration, welche sich auf einige Jahrhunderte vor Chr. bezieht, enthält noch nicht das moderne, d. h. das jetzt gebrauchte Zahlensystem mit dem Angelpunkte der Nulle, durch welche die Localwerte der Zahlzeichen ermöglicht und festgestellt wurden.

Wir bringen nun die ursprünglich indischen Zahlzeichen von 1—9 mit der Null aus dem II. und IX. Jahrhundert.

α) Indische Anfangsbuchstaben der Zahlwörter aus dem II. Jahrhunderte nach Chr. (nach Prinsep).

Hosted by Google

1 2 3 4 5 6 7 8 9

čka, dva, tri, tšatvar, pantšan, šaš, saptan, aštan, navan, dašan (10).

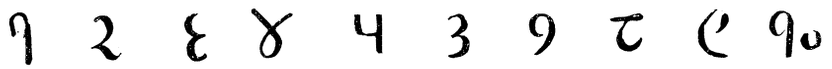
Die indischen Zahlenlaute, besonders für 2, 3, 6 und 10, zeigen eine auffallende Ähnlichkeit mit den slavischen Zahlennamen.

β) Alte Sanskritziffern aus dem IX. Jahrhunderte nach Prinsep.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

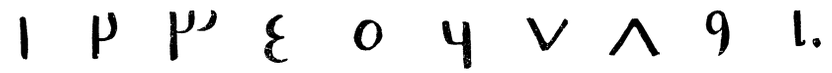
In der vor mir liegenden Schrift „Memoria sulle cifre arabiche“ und in dem von L. Hervas betitelten Buche „Aritmetica delle nazioni“ finden sich ziemlich übereinstimmend die folgenden ältesten Formen der indischen und arabischen Zahlzeichen:

γ) Indische Ziffern:



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

δ) Die ältesten arabischen Ziffern:



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Über den unsterblichen Ruhm, welchen sich die Inder durch die Entdeckung ihres gegenwärtig von allen Culturvölkern gebrauchten Ziffersystems erwarben, spricht sich Laplace (berühmter französischer Mathematiker † 1827) folgendermaßen aus: „Der Gedanke, alle Quantitäten durch 9 Zeichen auszudrücken, indem man ihnen zugleich einen absoluten und einen Stellenwert gibt, ist so einfach, dass man eben deshalb nicht genug anerkennt, welche Bewunderung er verdient. Aber eben diese Einfachheit und die Leichtigkeit, welche die Methode dem Rechnen gewährt, erheben das arithmetische System der Inder in den Rang der nützlichsten Entdeckungen. Wie schwer es aber war, eine solche Methode aufzufinden, kann man daraus entnehmen, dass sie dem Genie des Archimedes und des Apollonius von Perga, zwei der größten Geister des Alterthums, entgangen war.“

Dass den Indern die Erfindung der nun von allen gebildeten Völkern gebrauchten Ziffern und des Zahlensystems nicht streitig gemacht werden kann, geht zunächst daraus hervor, dass nach vergleichenden Untersuchungen

Hosted by Google

der Orientalisten in den 9 indischen Ziffern die Grundzüge der Anfangsbuchstaben der gleichwertigen Zahlwörter erkannt wurden (Wöpke, Journ. asiat. 1863. I, 73).

Über die Zeit der Erfindung der Nulle gehen die Ansichten ziemlich weit auseinander, denn sie schwanken zwischen dem I. bis IV. Jahrhundert n. Chr. — Wöpke führt aus einem um das Jahr 504 n. Chr. geschriebenen indischen Werke die darin vorkommende Zahl

432000

nach Übersetzung ihres Wortlautes von rechts gegen links in folgender Darstellung an:

„Drei Leeren (Nullen), Zahn (32), Meer (4).“

Die Erklärung dieser Darstellung der obigen Zahl liegt darin, dass die Inder bekanntlich mathematische Werke auch in gereimter Form schreiben; um aber für ihre Verse eine größere Auswahl von Zahlwörtern zu haben, bezeichneten sie gewisse, nicht hohe Zahlen mit den Namen von Dingen, die bekanntlich in der Natur gerade so oft vorkommen, als die Zahl Einheiten hat. So z. B. bedeutete im arithmetischen Sinne: Sonne, Erde oder Mond 1; Augen oder Hände = 2; 3 für alles, was gerade 3fach vorhanden war u. s. w. Zahn bedeutete in der poetischen Sprache 32, weil der Mensch 32 Zähne hat. Überdies bestanden auch Ausnahmen von dieser allgemeinen Regel, indem man an gewisse Namen Zahlen knüpfte, die mehr oder weniger willkürlich aber in der indischen Dichtkunst bekannt waren, so z. B.: Meer = 4, Feuer = 3, Schlange = 8.

Da im obigen Beispiel die Nulle oder das Leer vorkommt, und die Zahlen überhaupt nach ihrem Stellenwerte folgend von rechts nach links genannt werden, so setzt dieser Umstand die Erfindung des Stellenzeichens und dessen Gebrauch voraus. Dem entgegen versetzen andere Schriftsteller die neuen indischen Ziffern mit Stellenwerten in die Zeit vom IV. bis VII. Jahrhundert und bemerken, dass sie nicht vor dem VII. Jahrhundert nachweisbar sind, was sich wohl daraus erklären lässt, dass in alten Schriftwerken die Zahlen gewöhnlich mit Worten ausgedrückt erscheinen.

Nach einer alten und allgemein verbreiteten Ansicht hat der Westen Europas seine Kenntnis der indischen Ziffern und des Rechnens mit denselben zunächst seinem wissenschaftlichen Verkehr mit den Arabern zu verdanken, weshalb man die eigentlich indischen Zahlzeichen die arabischen zu nennen pflegt. Durch den gelehrten Gerbert[1]) (nachherigen Papst Sylvester II.) fand

[1]) Gerbert war der Familienname des Papstes Sylvester II. (999—1003). Gerbert war aus niederem Stande in der Auvergne geboren. Er studierte zu Barcelona und bei den Arabern in Sevilla und Cordova, bereiste Italien, Deutschland und Frankreich und lehrte dann in Rheims Mathematik, Philosophie und classische Literatur. Im Jahre 968 wurde er zum Abt, später zum Erzbischofe von Ravenna ernannt. Durch Vermittlung des Kaisers Otto III., dessen Lehrer er war, bestieg er im Jahre 999 den päpstlichen Thron, † 1003. Er besaß bedeutende mathematische, physikalische und chemische Kenntnisse, mit deren Hilfe es ihm gelang, manche Erfindungen zu machen, die für jene Zeit epochemachend waren und den wissenschaftlich Ungebildeten wunderbar erschienen.

Hosted by Google

zunächst die indische Arithmetik eine allgemeinere Verbreitung in Italien, Frankreich und Deutschland. Die indischen Ziffern und das Rechnen mit denselben konnten aber auch durch die Handelsbeziehungen, welche im XI. Jahrhunderte von Constantinopel aus zwischen den christlichen Kaufleuten und Indien bestanden, ohne Beihilfe der Araber direct vermittelt und verbreitet worden sein; auch ist der Fall nicht ausgeschlossen, dass Missionäre die indischen Ziffern nach Europa brachten. Sei dem wie es wolle, so bleibt doch Gerberts großes Verdienst um die Verbreitung des indischen Zahlensystems in Europa ungeschmälert.

Die Frage, ob man unsere gebräuchlichen Ziffern die arabischen nennen dürfe, wurde in diesem und im vorigen Jahrhundert zu einer sehr verwickelten gemacht. Bereits auf S. 31 erscheint die eine streitige Ansicht ihrer Wesenheit nach erwähnt; eine zweite nun folgende Streitfrage über die Abstammung unserer Ziffern stützt sich in der Hauptsache auf die folgenden Punkte: 1. In einigen Handschriften der Geometrie des Boëtius[1]) wie auch in mehreren Manuscripten über die praktische Rechenkunst des XI. Jahrhunderts fand man 9 Zahlzeichen, in welchen 1, 3, 8 und 9 den unserigen gleich sind und in 2, 5, 6, 7 die Grundzüge der jetzigen Zifferformen erkannt werden, nur die Ziffer vier hat eine ganz abweichende Gestalt. 2. In Boëtius' Schriften fand man angegeben, dass sich schon die Pythagoräer (Schüler des Pythagoras, geb. etwa 580 v. Chr.) auf dem Abacus der von Boëtius angeführten Zahlzeichen, welche mehr oder weniger ähnlich den unserigen Ziffern sind, bedient haben sollen. Ist dies aber der Fall, so waren die indischen Ziffern jedenfalls in Alexandrien und in Italien längst vor dem Auftreten der Araber bekannt, und müssten somit pythagoräische oder wenigstens boëtische und nicht arabische Ziffern genannt werden. Diese Schlussfolgerung ziehen Chasles und Wöpke u. a.; desgleichen Vossius und Weidler, welche im XVII. und XVIII. Jahrhundert sich eingehend mit den Zifferformen des Boëtius beschäftigen. Bei dieser Schlussfolgerung ergeben sich mehrere wichtige Fragen, deren genügende Beantwortung bisher fehlt, nämlich: Wie kamen die Pythagoräer zu den indischen Ziffern? Haben sie dieselben selbst erfunden, oder von anderen alten Culturvölkern erhalten? Haben die Pythagoräer unsere Ziffern den Indern mitgetheilt oder von diesen sie erhalten; oder sind sie beiden aus der gleichen Quelle zugeflossen? — Wegen Raummangels beschließen wir die noch nicht zu Ende gekommene Streitfrage, zu welcher in Anbetracht der großen Wichtigkeit, welche die Nulle im indischen Zahlensysteme einnimmt, noch beigefügt wird, dass in der von Sylvester

[1]) Boëtius, berühmter römischer Staatsmann und Philosoph, geb. zwischen 470—475 n. Chr. in Rom (510 Consul). Von seinen Schriften erwähnen wir nur die Übersetzungen von Nicomachus „Arithmetik", Euclids „Geometrie", Ptolemäus' „Astronomie", Archimedes' „Mechanik". Die erste Ausgabe der sämmtlichen Werke des Boëtius erschien zu Venedig 1491—92 in 2 Bänden.

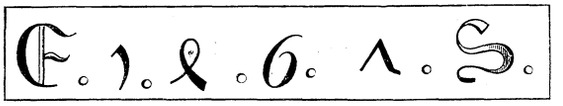
Hosted by Google

de Sacy in einem Manuscripte aus der Bibliothek der alten Abtei St. Germain du Près entdeckten Gobar- oder Staubschrift die Zehner, Hunderter u. s. f. durch beigesetzte Punkte angegeben erscheinen, als:

$$3^{\cdot} = 30;\ 4^{\cdot\cdot} = 400;\ 6^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot} = 60.000.$$

Über die allmähliche Verbreitung der indischen Ziffern in den verschiedenen christlichen Ländern Europas liegen bis jetzt noch keine genügenden Anhaltspunkte vor. In Deutschland gehören die nachweisbar ältesten arabischen Ziffern dem XI. Jahrhundert an (Friedleins Gerbert etc. S. 41). Andere Schriftsteller versetzen ihr Vorkommen erst in das XII. Jahrhundert; dem entgegen wird bemerkt, dass Docen in der Handschrift einer Regensburger Chronik vom Jahre 1167 der Reihe nach die Zahlen 1—68 mit arabischen Ziffern, aber wie zur Übung geschrieben, vorfand. In einem Notizbuche des Dithmar von Meckelbach in Schlesien, aus der Zeit Kaiser Karls IV. (1346—1378) findet man die Ziffern 1—10 geschrieben; in dem Einnahme- und Ausgabenverzeichnisse dieses Schriftstückes erscheinen jedoch noch römische Zahlen angewendet. Im XV. Jahrhundert findet man die arabischen Ziffern häufig bei Jahreszahlen und in Registern zu Handschriften, in Büchern der Kaufleute und auf Siegeln, doch in Urkunden noch selten; auf öffentlichen Denkmälern von Erz und Stein werden sie vor Beginn des XV. Jahrhunderts nirgends angetroffen.

In der Antiquitäten-Sammlung des Hauses Edmund Rothschild in Paris befindet sich aus dem XV. Jahrhundert ein Kupferstich, welcher in Halbfigur die Madonna auf der Mondsichel darstellt. Auf diesem Bilde hat der Meister die Jahreszahl



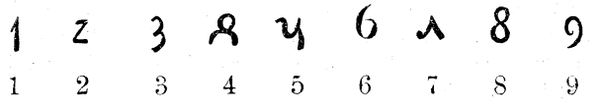
(d. h. 1467) mit den Anfangsbuchstaben seines Namens angebracht.

Nachfolgend geben wir die üblichen Formen der arabischen Ziffern aus dem XIII. bis XVI. Jahrhundert.

a) Aus dem XIII. Jahrhundert nach Sacrobosco:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

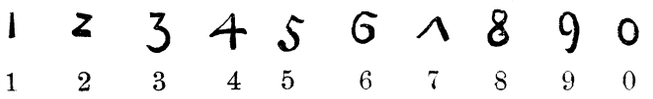
b) Aus dem XIV. Jahrhundert:



1 2 3 4 5 6 7 8 9

Hosted by Google

Geschriebene Ziffern aus dem XVI. Jahrhundert:



1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Schließlich bemerken wir, dass die höheren Stufenzahlen im Rechnen nur nach und nach zur Einführung kamen. So ist das Wort „Million“ zuerst in Italien gegen das Ende des V. Jahrhunderts in Gebrauch gekommen. Die Zahlenausdrücke „Billion“ und „Trillion“ sind erst im Anfange des XVII. Jahrhunderts eingeführt worden. Das Zahlwort „Milliarde“ für Tausende der Millionen kam zuerst in Frankreich vor einem halben Jahrhundert in Anwendung, und ist nun auch in Deutschland bekannt.

Hosted by Google

Dritter Abschnitt.

Über die drei Haupt-Zählungsmethoden und die von verschiedenen Völkern gebrauchten Zahlwörter.

Mit der Fortentwicklung der Begriffe, die eine Erweiterung der Sprache zur Folge hatten, suchte der Mensch die an seinen Körpergliedmaßen zuerst durch Anschauung erfasste, dann plastisch durch Fingerstreckungen versinnlichte Zahl auch sprachlich auszudrücken. Dieses erwachte Bedürfnis einer mündlichen Mittheilung der Zahlen führte zur Bildung der ersten Zahlennamen, welche zu den ältesten Bestandtheilen der Sprache gehören, und nicht selten in ihrer Ähnlichkeit die alte Stammesgemeinschaft später getrennter Völker erkennen lassen.

Mit Hinsicht auf die ersten Zahlennamen, aus welchen sich die Namen aller höheren Zahlen stufenmäßig aufbauen, ist ihre Menge von dem Umstande abhängig, ob ein Volk beim primitiven Zählen sogleich die Finger der beiden Hände abzählte und diese erste Gruppe zum Muster für alle nachfolgenden Stufen nahm, die von zehn zu zehn sich bildeten; oder ob ein Volk schon bei der aus einer Hand erhaltenen Fünfzahl stehen blieb, die als Mustergruppe für die Entstehung der höheren Zahlen diente.

Das erste auf die Zahl zehn sich stützende Zählungs-System heißt das Zehner-System oder dekadische System; das zweite, dem die Zahl 5 zu Grunde liegt, wird das Fünfer-System oder quinäre System genannt.

Wird beim Zählen von den Fingern der beiden Hände auch noch zu den Zehen fortgeschritten, dann erhält man das Zwanziger-System oder Vigesimal-System.

Vom Fünfer-System, welches nicht in Europa, aber in den andern Welttheilen und am häufigsten in Afrika angetroffen wird, folgen zwei Muster nach Potts Angaben im I. Th., 1847, S. 22 und 33.

I. Quinäre Zählungs-Systeme in Afrika.

a) **Kaffern auf Mozambique.**

1 = moassa.	6 = thana moassa (5 + 1).
2 = pili.	7 = thana pili (5 + 2).
3 = thára (ba-sutu).	8 = thana thára (5 + 3).
4 = ssessé (me-sana).	9 = looko.
5 = thana.	10 = míno komili ssesse.

Hosted by Google

b) **Fulah-Neger.**

1 = guh.	6 = guie-guh (5 + 1).	11 = sappo-guh (10 + 1).
2 = didy.	7 = guie-didy (5 + 2).	12 = sappo-didy (10 + 2).
3 = taty.	8 = guie-taty (5 + 3).	13 = sappo-taty (10 + 3).
4 = naye.	9 = guie-naye (5 + 4).	u. s. w.
5 = guieve.	10 = sappo.	20 = soppoe.
		21 = soppoe-guh (20 + 1).

Man sieht, dass die Fulah-Neger nach Abzählung der Finger an einer Hand, d. i. nach 5, die folgenden Zahlennamen durch Wortzusammensetzung aus den einfachen Zahlen (Stammzahlen) guh, dity, taty, naye und aus den nächst vorhergehenden Stufenzahlen gebildet haben. In unserem Zehner-Systeme geschieht ein Ähnliches, jedoch erst nach der Zahl zehn beginnend.

In den Nachrichten der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften vom Jahre 1866, S. 312, sagt der afrikanische Missionär Kölle: „Fast alle afrikanischen Zählsysteme haben eine quinäre, oder decimale, oder vigesimale, oder eine aus diesen zusammengesetzte Basis. Ausnahmen von dieser allgemeinen Regel gibt es allerdings, aber diese sind so selten, dass sie im ganzen fast verschwinden". — An einer andern Stelle wird von Kölle zu seinen Bemerkungen über die Zahlen-Etymologie beigefügt: „Mir sind selbst Neger vorgekommen, die überhaupt nicht weiter zählen konnten als bis 5; und einer derselben hat auf meine Frage, wie sie damit vollkommen ausreichen, geantwortet: „Lieber Massa, wir machen dies so: wenn wir 5 gezählt haben, legen wir's bei Seite auf ein Häufchen, und fangen dann wieder von neuem an". Beim wirklichen Zählen der Neger fiel mir der Umstand auf, dass viele von ihnen ihre Finger, und von 11 an sogar ihre Zehen zuhilfe nehmen."

2. Zählungs-Systeme der Ureinwohner in Amerika.

Die Bevölkerung Amerikas gehört der großen Mehrzahl nach dreien Menschenracen an; sie besteht nämlich aus den Ureinwohnern (Indianer und Eskimos), aus Fremden (Europäer und Neger) und aus Mischlingen. Die Neger sind als Sclaven aus Afrika nach Amerika gebracht worden. Die Indianer, etwa 9 bis 10 Millionen an der Zahl, zerfallen in zahlreiche Stämme mit mehreren Hundert Sprachen (nach Meyers Lexikon 500—600 Sprachen), davon ein Drittel wesentlich verschieden sind, worunter in Südamerika die Quinchuasprache die ausgebildetste und am weitesten verbreitete ist. Die Indianer sind nur zum Theil zum Christenthume bekehrt und friedliche Ackerbauer geworden, wie z. B. in Mexiko; andere führen jedoch noch ein unstätes Nomadenleben als Jäger in den Urwäldern, in die sie von der mehr und mehr sich verbreitenden Cultur immer tiefer zurückgedrängt werden. Die Hauptbevölkerung Amerikas bilden jetzt die Abkömmlinge der eingewanderten Europäer aller Nationen.

Am Ende des XV. und im Verlaufe des XVI. Jahrhunderts fand man im Westen Südamerikas nicht allenthalben wilde Stämme, sondern auch blühende

Hosted by Google

Staaten mit einer zahlreichen ackerbautreibenden und gewerbfleißigen Bevölkerung. Die Bewohner dieser Staaten kannten manchen Luxus, trugen fein gewebte und dauerhaft gefärbte Kleider aus Baumwolle, hatten große, mit prachtvollen Tempeln und Palästen gezierte Städte und machten ihre Aufzeichnungen in einer sinnreichen Bilderschrift.

Wir bringen nun aus Amerika, wo die drei früher genannten Zählungs-Systeme im Gebrauche sind, nach Hervas' Berichten und aus Glavigeros Werke: „Storia antica del Messico" von einigen Indianerstämmen die gebräuchlichsten Zählungsarten.

a) **Araukaner** (Bewohner von Chili).

Neuere Nachrichten über die kriegerischen Araukaner, auch Araucos genannt, deren Zahl von einigen auf 80.000 geschätzt wird, gibt Pöppig; er sagt: Man hat den Araukanern fälschlich eine Bildung zugeschrieben, welche niemand unter Wilden suchen wird; denn wenn sie auch eine höhere Civilisation als ihre Nachbarn besitzen, indem sie (eigentlich ihre Weiber) Ackerbau treiben, feste Wohnungen erbaut und wenigstens Versuche, um zu einer Regierungsform zu gelangen, gemacht haben, so bleiben sie bei alledem doch Wilde. Ihr angeblich republikanisch geordnetes System ist Fabel. Die Horden vereinigen sich nur zum Zwecke eines gemeinschaftlichen Raubzuges. Dieselbe Barbarei, welche bei den übrigen Indianern Amerikas herrscht, herrscht auch bei ihnen. Das Recht des Stärkeren gilt bei ihnen als höchstes Gesetz. Die gewöhnlichen Waffen der Araukaner sind lange Lanzen mit einer Eisenspitze und breite Messer, welche sie unter dem Mantel tragen. Sie sind sehr kühne Reiter und fechten zu Pferde, wie die Kosaken, ohne Ordnung, aber mit großer Tapferkeit, und bedienen sich hierbei an langen Riemen befestigter Eisenkugeln, die sie so zu schleudern wissen, dass sie sich um die Beine der Pferde schlingen. Ein Araukaner verrichtet nie eine Handarbeit; er würde sich dadurch erniedrigt glauben. Seine vorzügliche und fast einzige Beschäftigung ist, Pferde in den Pampas zu fangen, zu bändigen und zu reiten.

Die Araukaner zählen nach unserem Zehner-Systeme wie folgt:

1 = kiñe.	11 = marikiñe.	60 = kayumari.
2 = epu.	12 = mariepu.	70 = relghemari.
3 = kula.	13 = marikula.	80 = puramari.
4 = meli.	u. s. w.	90 = aillamari.
5 = keku.	20 = **Epumari** (zwei zehn).	100 = **pataca.**
6 = kayu.	21 = epumarikiñe.	200 = epupataca.
7 = relghe.	22 = epumariepu.	u. s. w.
8 = pura.	u. s. w.	1000 = **huaranca.**
9 = ailla.	30 = **kulamari.**	2000 = epuhuaranca.
10 = **mari.**	40 = melimari.	u. s. w.
	50 = kekumari.	

Das Zahlwort keku (für 5) stammt von dem araukanischen Wurzellaute kun, d. h. Hand (Hervas, 95).

Hosted by Google

b) **Karaiben.**

Karaiben, ein ehemals weit verbreitetes, wildes und kriegerisches Indianervolk, welches vor der Ankunft der Europäer nicht bloß die Antillen oder karaibischen Inseln, sondern auch die Ländergebiete am Orinoco bis zum Amazonenstrome bewohnte und in sehr viele Stämme mit verschiedenen Mundarten zerfiel; gegenwärtig ist die Hauptmasse der Karaiben im südöstlichen Venezuela und in Guyana, ihre Gesammtzahl ist nun eine sehr kleine. Zur Zeit des Columbus verstanden sie Baumwolle zu weben und roth zu färben. Die in ihrem Cultus wurzelnde rohe Sitte, ihre Feinde zu fressen, verschaffte ihnen einen besonders gefürchteten Namen.

Die Karaiben zählen nach folgendem Systeme:

1 = petei oder moñepe. 2 = môcoi.
3 = mbohapi. 4 = irundi oder iruncoi.
5 = irundi hae nirûi (4 und der andere).
6 = ace pòpetei, hae petei abè (die Hand und eins mehr).
7 = ace pòpetei, hae môcoi abè (die Hand und zwei mehr).
8 = ace pòpetei, hae mbohapi abè (die Hand und drei mehr).
9 = ace pòpetei, hae irundi abè (die Hand und vier mehr).
10 = **pomocoi** (zwei Hände der Person).
11 = ace pomocoi, hae petei abè (zwei Hände der Person und eins mehr).
20 = **pombiabè** (Hände und Füsse).
30 = **pombi,** hae pomocoi abè (Hände und Füsse und zwei Hände mehr).

Nach den Berichten der Jesuiten-Missionäre Camaño und Velasco haben diese bei den wilden Stämmen der Karaiben-Indianer nie eine höhere Zahl als 30 gehört; denn, wenn sie von einer größeren Menge sprechen wollen, so sagen sie „hetà“ oder „hetai“, d. i. viele. Das Wort „ndatei“ oder „ndaeteicatu“ heißt „sehr viel“ und wird als unbestimmte zweithöhere Stufenzahl gebraucht. Mit „ndi papahabi“, d. i. unzählbar, bezeichnen die Karaiben die größtmöglichste Menge der Dinge.

Das bis 30 reichende Zählungs-System der Karaiben beruht auf der in folgenden Worten ausgedrückten einfachen Idee: „eins, Paar, Hand und Fuß“, wie sich aus der folgenden zergliederten Übersetzung (nach Hervas) der guaranischen Zahlwörter ergibt.

Im Zahlennamen „mocoi“, welcher aus coi und dem Partikel mo zusammengesetzt ist, bedeutet coi (auch ci) ein Paar, oder zwei vereinigte Dinge.

Das Wort pòpetei ist zusammengesetzt aus po, d. h. Hand und aus petei, d. h. eins; ebenso bedeutet pomocoi eine Zusammensetzung aus Hand und zwei. Das vor pòpetei und vor pomocoi stehende ace ist der sächliche Artikel. Das Wort pombiabè ist zusammengesetzt aus po (Hand), mbi (Fuß), und abè (auch).

c) **Azteken** (Urbewohner von Mexiko).

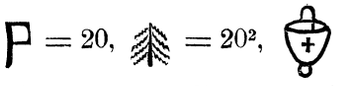
Der Staat der Azteken war zur Zeit der Ankunft der Europäer in Amerika ein mächtiges Wahlkönigreich. Die Hauptbeschäftigung der damaligen

Hosted by Google

Bewohner war Ackerbau, der mit den religiösen Einrichtungen eng verbunden war und die Grundlage des gesammten Nationalwohlstandes bildete.

Das Rechensystem, namentlich das Kalenderwesen und die Chronologie der alten Mexikaner oder Azteken setzten bedeutende Kenntnisse in Mathematik und Astronomie voraus. Ihr Sonnenjahr mit 18 Monaten à 20 Tagen, wozu noch 5 Schalttage kamen, war genauer berechnet als das der Griechen und Römer.

Die alten Mexikaner gebrauchten in ihrer Bilderschrift zur Darstellung der Zahlen Punkte und die folgenden drei Zeichen:

 = 20, 20^2, 20^3, mit welchen sie durch Wiederholung in additiver Form die Zahlengrößen ausdrückten.

So z. B. waren = 3, = 5, = 12, = 44,

= 2mal $20^3 + 20^2 + 3$mal $20 + 18 = 16478$.

Hierbei wurden ausgesprochen: 20 = poàli, 20^2 oder 400 = tzontli, 20^3 oder 8000 = xikipilli, 16000 oder 2×8000 = omxikipilli (zusammengesetzt aus ome = 2 und xikipilli = 8000).[1])

Für die Bezeichnung der Zeiten hatten die alten Mexikaner die folgenden Symbole:

Mitternacht,

Nacht,

Tag,

ein Tag,

eine Woche zu 5 Tagen.

Da sie in Zeiträumen zu 52 Jahren rechneten, so gebrauchten sie hiefür 52 verschiedene Zeichen. Zwei Epochen von je 52 Jahren, d. h. 104 Jahre, nannten sie huehuetiliztli (Alter), und man findet diesen Zeitraum häufig in den alten mexikanischen Bildern durch einen in einer Vase befindlichen fünftheiligen Blumenstrauch dargestellt.

Das Zwanziger-Zählungs-System der Azteken oder alten Mexikaner lautet:

1 = **ce**	6 = chicua**ce**	11 = matlactli-occe	16 = chaxtòli-occe
2 = **ome**	7 = chicu**ome**	12 = matlactli-omeme	17 = chaxtòli-omeme
3 = **yei**	8 = chicu**yei**	13 = matlactli-omei	18 = chaxtòli-omei
4 = **nahui**	9 = chicua**nahui**	14 = matlactli-omnahui	19 = chaxtòli-omnahui
5 = macuili oder chicua, lies kikua.	10 = **matlactli**	15 = **chaxtòli**	20 = **cempoàli** (auch nur poàli).

(Bis zur Zahl 20 ist das Fünfer-System ausgedrückt.)

[1]) Pott, I. Th., S. 98 erklärt nach Buschmanns Kawiwerk die Zahlwörter für 5 und 10 aus ma-itl, d. i. Hand entstanden. 400 = **tzontli** bedeutet „Haar“ und 8000 = **xikipilli** ist gleichbedeutend mit „Korb“, weil darin so viele Cacaobohnen enthalten gedacht werden. So erklären sich die Bilderzeichen für diese letzteren zwei Zahlwörter.

Hosted by Google

30 = cempoàli-ipan-matlactli (ein zwanzig über zehn).
40 = ompoàli (zwei zwanzig).
50 = ompoàli-ipan matlactli (zwei zwanzig über zehn).
60 = epoàli (drei zwanzig); epoalice (61); epoaline (62) etc.
70 = epoàli-ipan-matlactli (drei zwanzig über zehn).
80 = nahupoàli (vier zwanzig).
90 = nahupoàli-ipan matlactli (vier zwanzig über zehn).
100 = macuilpoàli (fünf zwanzig).
120 = chicuacempoàli (sechs zwanzig).
200 = matlacpoàli (zehn zwanzig) u. s. w.

Dieses Zählungs-System der alten Mexikaner in Gruppen von 20 zu 20 ist ein Zwanziger-System.

Die in Mexiko eingeborenen Indianer (circa $4^1/_2$ Millionen) gehören größtentheils der aztekischen Völkergruppe an, jener berühmten Nation in Mittelamerika, deren Reich von Cortez in den Jahren 1519—21 erobert und in ein Vicekönigreich, Neuspanien, verwandelt wurde. Von der bedeutenden Cultur des Aztekenreiches in vergangener Zeit geben noch sehr viele Denkmale Zeugnis. Die mexikanischen Indianer werden in die christlichen (civilisierten) und in die heidnischen eingetheilt.

d) Quichua's oder Peruaner (Inka's).

Die Quichua's zählen nach folgendem Systeme:

1 = huc, oder suc.	11 = chunca hucyoc (10 mit 1).	60 = soctachunca.
2 = iscai.	12 = chunca iscaiyoc (10 mit 2).	70 = canchischunca.
3 = kimsa.	13 = chunca kimsayoc (10 mit 3).	80 = pussacchunca.
4 = tahua.	14 = chunca tahuayoc.	90 = isconchunca.
5 = pichea.	u. s. w.	100 = **pachac.**
6 = socta.	20 = **iscaichunca.**	200 = iscaipachac.
7 = canchis.	21 = iscaichunca huncniyoc.	300 = kimsapachac.
8 = pussac.	22 = iscaichunca isciniyoc.	1000 = **huaranca.**
9 = iscon.	u. s. w.	2000 = iscaihuaranca.
10 = **chunca**	30 = **kimsachunca.**	10.000 = chuncahuaran ca
	40 = tahuachunca.	1,000.000 = **hunu.**
	50 = picheachunca.	

Die Zählungsweise der Peruaner, welche auf dem Zehner-Systeme beruht, steht dem europäischen Zählungs-Systeme nicht nach.

Die Quichua's waren zur Zeit der Eroberung durch die Europäer ein mächtiges und civilisiertes Volk, dessen Sprache später durch die Missionäre zu einer Schriftsprache ausgebildet wurde, und noch jetzt die allgemeine Landessprache im Hochlande und im Küstenstriche von ganz Peru, Ecuador und den nordwestlichen Provinzen der argentinischen Republik ist. Von dem alten Culturstaate der Inka's sind schon seit Jahrhunderten nur noch Trümmer übrig. Die Paläste dieses einst mächtigen Reiches sind in Schutt und Staub zerfallen.

Hosted by Google

e) Aimàra-Indianer.

Zählungs-System:

1 = mai.	6 = sogta.	11 = tuncamayani.	50 = piscatunca.
2 = paya.	7 = pacalco.	12 = tuncapayani.	60 = sogtatunca.
3 = kimsa.	8 = kimsacalco.	u. s. w.	70 = pacalcotunca.
4 = pusi.	9 = pusicalco.	20 = **payatunca.**	80 = kimsacalcotunca.
5 = pisca.	10 = **tunca.**	30 = kimsatunca.	90 = pusicalcotunca.
		40 = pusitunca.	

100 = pataca; 101 = patacamayani; 102 = patacapayani; 1000 = huaranca.

In einer älteren Sprache sollen die Aimàren der Zahl 5 den Namen **calco** gegeben haben; weshalb sich noch erhalten hat kimsa-calco, d. i. drei-fünf (8) und pusi-calco, d. i. vier-fünf (9). Es sind demnach Spuren vorhanden, dass die Aimàra-Indianer vom Fünfer-Systeme später zum Zehner-Systeme übergiengen.

In einigen Quinar-Systemen hat man bemerkt, dass die zwischen 5 und 10 gelegenen Zahlenausdrücke erst von 7 angefangen aus 5 und den primitiven Zahlwörtern zusammengesetzt sind, wie es hier der ähnliche Fall ist. Auch in unserem Zehner-Systeme wird erst von dreizehn an in den zusammengesetzten Zahlwörtern die Grundzahl „zehn“ erkennbar.

f) Cora-Indianer.

Diese zählen nach dem Zwanziger-Systeme wie folgt:

1 = ceäut.	6 = acevi.	11 = tamoâmata-apon-ceäut
auch **cei.**	7 = ahuapoa.	(d. h. zehn über eins).
2 = huàlpoa.	8 = ahuaeica.	12 = tamoâmata-apon-huàlpoa
3 = huaeia.	9 = amoàcua.	(zehn über zwei), u. s. w.
4 = moâcoa.	10 = **tamoâmata.**	20 = **ceitevi.**
5 = anxüvi.		21 = ceitevi-apon-ceäut.

30 = ceitevi-apon-tamoâmata (zwanzig über zehn).
40 = huahcatevi oder huahceitevi (zwei zwanzig).
50 = huahcatevi-apon-tamoâmata.
60 = huaeicatevi (drei zwanzig).
70 = huaeicatevi-apon tamoâmata.
80 = moacuatevi (vier zwanzig).
90 = moacuatevi-apon-tamoâmata.
100 = anxütévi (fünf zwanzig).
200 = tamoâmatevi (zehn zwanzig).
300 = tamoamatevi-apon-anxütévi (zehn zwanzig über fünf zwanzig).
400 = ceitevitevi (ein zwanzig zwanzig).

Die Zahl zehn wird mit dem Worte „tamoâmata“ ausgedrückt, welches deutlich dem Coraworte moamati ähnlich ist, das im allgemeinen „Hand“ bezeichnet. Die linke Hand heißt „ûtat“ und die rechte wird „uriti“ genannt. In der Corasprache heißt zwanzig „ceitevi“, d. h. ein zwanzig, weil das Wort „cei“ eins bedeutet, und da „tevi“ zwanzig ausdrückt, so bezeichnet „moacua-tevi“ vier zwanzig, d. h. 80.

Hosted by Google

Das Wort „tevi“ ist auf das klarste dem Coraworte „tevit“ ähnlich, welches dieselbe Bedeutung wie im Lateinischen homo, d. i. Mann hat. Man ersieht also daraus, dass der Cora-Indianer „zehn“ mit dem Namen „Hände“ bezeichnet, und für „zwanzig“ den Ausdruck „Person“ (Mann) gebraucht. Der Zahl 400 (das Quadrat von 20) gibt der Cora den Namen „ceitevitevi“, d. i. cei-tevi-tevi, nämlich: eine Person von der Person. Der berühmte Sprachforscher Hervas sagt weiter: Man sieht deutlich, dass in der Rechenkunst der Cora-Indianer das Zählen nach „Zwanziger“ sich auf 20 (dita dell' uomo), d. i. auf die Summe der Finger und Zehen des Menschen bezieht, welcher Gebrauch ebenfalls in der rohen (rozza) Rechenkunst verschiedener anderer uncultivierten Nationen angetroffen wird. [1])

g) Vilela-Indianer.

Die Vilela-Indianer gebrauchen beim Zählen die folgenden Laute und Gesticulationen:

1 = yaagüit.
2 = ukè.
3 = nipetuéi.
4 = yepcatalèt.
5 = isig-nisle yaagüit (übersetzt: von einer Hand alle Finger).
6 = isig teèt yaagüit (die Hand und ein Finger).
7 = isig teèt ukè (die Hand und zwei Finger).
8 = isig teèt nipetuéi.
9 = isig teèt yepcatalèt.
10 = isig-ukè-nislè (übersetzt: die Finger von zwei Händen).
11 = isig-ukè-nislè teèt yaagüit (Finger von zwei Händen und eins).
12 = isig-ukè-nislè teèt ukè.
20 = isig-ape-nisle lauel (alle Finger an Händen und Füßen).

Höhere Zahlen als 20 bezeichnet der wilde Vilela-Indianer durch Gesticulationen und Laute zugleich. Bei Zahlen, die zwischen 20 und 40 liegen, ruft er „oñe“ (d. h. mehrere über 20) und ergänzt anschaulich an Händen und Füßen die Mehreinheit über Zwanzig der auszudrückenden Zahl.

So z. B.: Rechte Hand ausgestreckt und ein Fuß gehoben, mit der linken Hand drei Finger gezeigt und gleichzeitig gerufen „oñe“, bedeutet die Zahl 33, welche sich der Vilela als eine Menge von Dingen vorstellt, die um zwei Hände und drei Finger größer als 20 ist. Die Zahl 40 bezeichnet er, indem er die Füße ausspreizt, beide Hände weit ausstreckt und unter einem sagt: „ukebè“, d. h. zweimal; ebenso, wenn er in gleicher Stellung ruft: „yepcatalebè“, d. h. viermal, bezeichnet er die Zahl 80.

Die Vilela-Indianer zählen bis 20 nach dem Fünfer- oder Quinär-Systeme.

Anmerkung. Das Quinär-System, wie dieses von uncultivierten Völkern noch heute gebraucht wird, ist bloß im linguistischen, nicht aber im mathematischen Sinne aufzufassen; denn ein streng mathematisches Quinär-System müsste $5 \times 5 = 5^2$; $5 \times 5 \times 5 = 5^3$ ... u. s. w., also 25, 125, etc. nächst der 5 als Einheiten höherer Ordnung besitzen, was in den gebrauchten Quinär-Systemen nicht vorgefunden wird. So müsste im mathematischen Quinär-Systeme z. B. 13 durch $(2 \times 5) + 3$ aus dem Namen (2×5) und

[1]) Nach Hervas, pag. 112: La voce „tevi“ è chiarissimamente affine alla parola Cora „tevit“, la quale ha la stessa significazione della latina „homo“, cioè uomo. Rilevasi dunque, che nell' aritmetica Cora il dieci chiamasi „mani“; ed il venti dicesi „persona“. Il numero 400 è il quadrato del 20: ed ad esso in Cora dassi il nome „ceitevitevi“, cioè „cei-tevi-tevi“ una persona di persona.

Hosted by Google

aus der einfachen Benennung der primitiven Einheit für 3 zusammengesetzt sein; wonach $25 = 5 \times 5$ gleichsam die Stelle von $100 = 10 \times 10$ in dem beim Zehner-Systeme üblichen Sinne einzunehmen hätte. — Anders verhält es sich mit dem Vigesimal- oder Zwanziger-Systeme, das sich öfters mit strenger Consequenz auch über 100 aufwärts 120, 140, 160 u. s. w. bis $400 = 20^2$, $8000 = 20^3$, $16.000 = 20^4$ fortsetzt, wie es im Vigesimal-Systeme der alten Mexikaner (Azteken-Indianer) angetroffen wird.

3. Die ersten zehn Grundzahlwörter (Cardinalzahlen) verschiedener Völker.

Die folgenden zwei tabellarischen Zusammenstellungen der ersten zehn Zahlwörter aus 74 Sprachen beweisen nicht allein in der Ähnlichkeit ihrer lautlichen Gestaltung die alte Stammgemeinschaft später getrennter Völker, sondern sie geben auch die Basis zur Bildung für alle zusammengesetzten Zahlwörter und lassen in der wechselseitigen Affinität der Namen gleicher Zahlen die Zählmethode vor der Völkertheilung erkennen, auf die wir später zurückkommen werden.

Die den europäischen Sprachen angehörigen Zahlwörter theilt Hervas (Aritm. delle nazioni, pag. 115) in folgende Classen ein:

1. Zahlwörter der Basken[1]), deren Sprache mit keiner bekannten verwandt ist. — 2. Zahlwörter jener Sprachen, die den griechischen oder den lateinischen Zahlennamen ähnlich sind. — 3. Zahlwörter der Scythen[2]) und 4. jene der tatarischen Sprache angehörigen.

Der scytische Ursprung zeigt sich bei den Zahlwörtern der Ungarn, Finnländer und Lappländer. Zum tatarischen Sprachenstamme in Europa gehören besonders die Zahlwörter der Türken, deren Sprache zu den ausgebildetsten tatarischen Idiomen gerechnet wird.

Einige Zahlwörter der Sanskritsprache zeigen eine auffallende lautliche Verwandtschaft mit den persischen, germanischen, slavischen, griechischen und lateinischen Zahlennamen.

Die germanischen Zahlennamen (Nr. 12—22) in den nun folgenden Tabellen verdanke ich der gefälligen Mittheilung des Herrn Dr. C. J. Schröer, Professor der deutschen Literatur an der Wiener k. k. technischen Hochschule. Die romanischen, slavischen und ungarischen Zahlwörter sind aus verschiedenen Grammatiken für diese Sprachen und die andern zu den europäischen und außereuropäischen Idiomen gehörigen Zahlwörter aus Potts „Sprachverschiedenheit“ (Halle, 1868) und aus Hervas' Encyklopädie („Idea dell' universo“ in 21 Bänden von 1778—87), sowie aus noch anderen Werken entnommen worden.

[1]) Die Basken (auch Vasconier genannt) sind ein uraltes, höchst merkwürdiges Bergvolk, das auf beiden Abdachungen der Westpyrenäen und am Meerbusen von Biscaya wohnt. Die Basken zählen nach dem Zwanziger-Systeme; ihre Sprache ist eine der eigenthümlichsten und ältesten Sprachen der Erde. In Rom waren die Basken als gute Wahrsager aus dem Vogelflug bekannt.

[2]) Die Scythen, ursprünglich ein asiatisches Nomadenvolk, haben sich um 600 v. Chr. vom Altai aus über den Nordosten Europas verbreitet, von wo sie später nach Vorderasien und Syrien bis an die Grenzen Ägyptens vordrangen.

Hosted by Google

4. Über die Entstehung der Zahlwörter.

Als der Mensch in seinen Fingern die primitiven Einheiten und in ihrer Zusammenfassung zur Hand die nächst höhere Einheit im Fünfer erblickte, übertrug er in den Anfängen der sprachlichen Zahlenbildung den Namen der Hand auf die Zahl 5; so wird es noch in unserem Jahrhundert vielfach bei den Ureinwohnern Amerikas angetroffen, die uns in ihrer weit zurückgebliebenen geistigen Entwicklung den Urzustand vergegenwärtigen, in welchem sich die heutigen Culturvölker im frühesten Alterthum befanden.

Über die Entstehung der Zahlwörter sagt treffend Wilh. v. Humboldt in dem Werke über die Kawisprache auf der Insel Java (Berlin 1836—40) im I. Bande: „Wenn man in mehreren Sprachen des Malayischen Stammes „5 durch Hand (lima) bezeichnet, so ist das gerade dasselbe, als wenn man „in der Bezeichnung der Zahlen durch Wörter die Zahl 2 durch Flügel (Hände, „Arme, Augen etc.) andeutet. Unstreitig liegen allen (primitiven) Zahlwörtern „ähnliche Metaphern zu Grunde, die sich nur jetzt nicht immer mehr auf„finden lassen. Die Völker scheinen aber früh gefühlt zu haben, dass die „Vielheit solcher Ausdrücke für die Zahl überflüssig, ja unbequem sei und „zu Missverständnissen führen könne. Daher sind Synonyma von Zahlen, aus „derselben Sprache entspringend, eine sehr seltene Erscheinung, obgleich sich „wirklich davon einige Beispiele in den Sprachen der Südsee finden. Um „daher die Reinheit des Zahlenbegriffes zu erhalten, haben Nationen von „tieferem Scharfsinne die Namen der Sachbegriffe aus den Zahlwörtern ent„fernt, wonach für diese conventionelle Laute eingeführt wurden.

Zur Frage über die Entstehung der Zahlwörter citiere ich noch A. Benary, welcher im Berliner Jahrb. vom Juli 1833, S. 49, die Behauptung ausspricht, dass in dem Sanskrit-Zahlworte für 5 = pàn̆can (pantschan) das **n** am Schlusse falsch sei, wonach sich als richtiger panča für 5 ergibt. An dieses knüpft er die Ableitung des Zahlwortes für 5, indem er constatiert, dass im Sanskrit panič̆a „Hand“ bedeutet, weshalb der Zahlenname panča (5) von panič̆a (Hand) gebildet erscheint. Zu diesem die Affinität der Ausdrücke für Fünf und Hand im Sanscrit nachweisenden Citate von Benary bemerke ich, dass von den europäischen Sprachen in den slavischen Idiomen, welche in den Zahlwörtern die nächste Verwandtschaft mit dem Sanskrit zeigen, die Zahl Fünf von der geballten Hand (Faust) abgeleitet erscheint. So findet man für die Faust im Polnischen pięść, im Čechischen pěst, im Kroatischen und Slovenischen pest; für 5 hingegen werden in diesen Sprachen durch Auslassung des *s* (im Sanskrit durch Auslassung des *i*) die ähnlich lautenden Zahlwörter pieč̆, pět und pet erhalten. Die ähnlichen Ausdrücke für 5 und Faust (geballte Hand oder Hand mit eingeschlagenen Fingern und Daumen) in den slavischen Sprachen dürften vom Fingerzählen durch Fingerbeugungen, vom kleinen Finger bis incl. Daumen fortschreitend, ihre Abstammung haben.

Hosted by Google

Aus den bisher erwähnten Gründen, so wie in Anbetracht der geschichtlichen Nachweise, dass außer Ägyptern, Etruskern und Römern auch noch andere Culturvölker des Alterthums nur einfache Striche als Zahlreihen bis zum Fünfer (V) gebrauchten, lässt sich folgern, dass die älteste Numeration nach Fünfern stattfand. Die Zählungsweise nach Fünfern dürfte jedoch keinen sehr langen Bestand gehabt haben, und man wird noch vor der Völkertheilung angefangen haben nach Zehnern zu rechnen. Für diese Annahmen sprechen folgende zwei Thatsachen:

1. In den meisten Sprachen fangen die Zahlwörter sowohl für 6 als für 7 mit s an. So bemerkt man in der vorhergehenden Zahlwörter-Tabelle I, dass unter 33 Zahlwörtern 24 für sechs und 26 für sieben mit einem s anfangen. In der II. Tab. sind unter 26 Zahlennamen 8, die für sechs, und 10, die für sieben mit s anfangen.

2. In sehr vielen Sprachen zeigen die Zahlennamen, laut Tabellen I und II, sowohl für 6 als für 7 eine auffallende Ähnlichkeit.

Diese Beobachtung führt zu der begründeten Annahme, dass schon vor der Völkertheilung der Buchstabe s bei den Zahlwörtern 6 und 7 in den verschiedenen Sprachen gebraucht wurde; denn es ist nicht leicht möglich zu denken, dass getrennte Völker, die sich nicht kannten, und die nach ihrer Zerstreuung über die Erde in keinem geschäftlichen Verkehre standen, sich geeinigt hätten, in ihren Sprachen bei der Bezeichnung für 6 und 7 nicht allein den gleichen Anfangsbuchstaben, sondern auch die ähnlich klingenden Laute einzuführen. Mehrere Sprachen, deren Zahlwörter für 6 und 7 nicht mit s anfangen, zeigen Spuren, dass sie im Alterthume mit s angefangen haben, weil man findet, dass die zusammengesetzten Namen der Zahlen für 60 und 70 mit s anfangen. Nicht minder sind unter sich die Zahlwörter für 10 bei den meisten Völkern ähnlich, die nach Zehnern rechnen.

Wird nicht zugegeben, dass diese vielseitige Ähnlichkeit der Namen für dieselbe Zahl (auffallend auch bei 2 und 3) von der Ursprache stamme, so bleibt diese Übereinstimmung im Zahlenausdrucke bei den verschiedenen Sprachen immer sehr bewunderungswürdig, und es lässt sich auf die vorgeführten Thatsachen basierend doch mit großer Wahrscheinlichkeit behaupten, dass schon vor der Völkertheilung und nicht in den darauf folgenden Jahrhunderten das Zählen und Rechnen nach Zehnern und Zwanzigern stattgefunden habe.

Überreste des Zwanziger-Systems findet man in Europa noch bei der französischen Nation, welche von den Kelten (Celten) stammt und wie diese anfangs nach dem Zwanziger-Systeme zählte, mit der Zeit jedoch zum Zehner-Systeme übergieng und die Zahlwörter aus dem Lateinischen bildete. Man findet noch heute im Französischen die Trümmer der alten keltischen Zählweise nach Gruppen zu „Zwanzig“ bei den Zahlwörtern: 80 = quatre-vingt (d. i. 4 Zwanziger), quatre-vingt-un, quatre-vingt-deux u. s. w. und bei 90 = quatre-vingt-dix. — Spuren des Überganges vom Fünfer-System zum Zehner-System sehen wir unter e) bei den Aimàra-Indianern.

Hosted by Google

Vierter Abschnitt.

Rückblick auf das älteste Rechnen der Völker.

Welche Reihe von Jahrtausenden mag verflossen sein, die das Menschengeschlecht in der langen Stufenleiter seiner geistigen Entwicklung durchlaufen musste, bevor der geniale Gedanke: mit wenigen Wörtern und Zeichen alle möglichen Zahlen mündlich und schriftlich auszudrücken, in der historischen Urheimat, in Vorderindien, verwirklicht wurde! — Die Größe der Idee dieses indischen Positionssystemes, mit welchem der Grundstein zum heutigen Zifferrechnen bei allen Culturvölkern gelegt wurde, drängt uns unwillkürlich die Frage auf: Wie rechneten die Menschen, bevor ihre Trennung in verschiedene Völkerstämme und ihre Zerstreuung auf der Erde vollzogen wurde? Diese Frage lässt die Geschichte unbeantwortet. Und doch konnten die Völker in der vorgeschichtlichen Zeit, in der sie noch als Jäger, Fischer und Ackerbautreibende ohne staatliche Einrichtungen gedacht werden, das einfachste Grundverfahren des Zusammenzählens und Abziehens ebenso wenig entbehren, als es die halbwilden Indianerstämme und Neger entbehren können, die, ohne Lesen und Schreiben zu verstehen, das Zählen und die ersten Grundzüge der Rechnungs-Species in kleinen Zahlenkreisen durch gegenseitige mündliche Mittheilung sich aneignen.[1])

Es unterliegt keinem Zweifel, dass schon in jener vorgeschichtlichen Zeit, als man aus der Summe von nur wenigen primitiven Zahlwörtern mittelst der 4 Species jede beliebige Zahl sprachlich durch Zusammen-

[1]) Aus dem achtzehnten Jahresberichte des Rathes der öffentlichen Schulen von St. Louis in Amerika ist zu ersehen, dass es dort auch Schulen für Indianer und Neger gibt. In diesem Berichte S. 99, ist zu lesen: „Die Zunahme der farbigen Schüler — wenn es überhaupt eine solche ist — scheint sehr unbedeutend zu sein. Im ganzen waren 1568 in diesen, gegen 1560 im letzten Jahre eingeschrieben worden. Es ist zweifelhaft, ob die Negerbevölkerung, welche der Census vom Jahre 1870 auf 22.088 angibt, nicht eher ab- als zunimmt.“ Die Stadt St. Louis mit 360.000 Einwohnern hatte im Jahre 1876 neben 52 District-Schulen auch 6 Negerschulen mit 24 Lehrern.

Hosted by Google

setzungen zu bilden angefangen hatte, der Mensch bereits von dem einfachen Zählen zum Rechnen übergegangen war.[1])

Die ältesten geschichtlichen Spuren vom Rechnen findet man bei Herodot, welcher erzählt: „Die Ägypter schreiben Schriftzüge und rechnen mit Steinen, indem sie die Hand von rechts nach links bringen, während die Hellenen sie von links nach rechts führen.“ Zu diesem Citate bemerkt Cantor in seiner „Geschichte der Mathematik“ I. B., S. 43: „Diese Erzählung, wo sie der hieratischen Schriftfolge der Ägypter von rechts nach links gedenkt, gewährleistet ein Rechnen mit Steinen muthmaßlich auf einem Rechenbrette etwa für das Jahr 460 v. Chr. Sie gewährleistet es für die Griechen mit derselben Sicherheit wie für die Ägypter.“

Das Rechnen auf einem Rechenbrette in alter Zeit setzt voraus, dass irgend ein als die primitive Einheit angenommenes Ding, sei es nun ein Steinchen, eine Muschel, ein Metallscheibchen oder ein Strich an verschiedenen Stellen, die etwa durch Parallellinien in wagrechter oder senkrechter Richtung gegen den Rechner angedeutet sind, nach dem zu Grunde gelegten Zahlen-Systeme seinen Wert verändere; dass also z. B. beim Decimal-Systeme ein jedes solches Steinchen oder Strichlein eine Verzehnfachung erfahre, wenn es von einem Parallelstreifen in den zunächst benachbarten gelegt wird. Aus der vorcitierten Stelle des Herodot kann gefolgert werden, dass die Griechen und die Ägypter Rechenbretter mit senkrechten Reihen gebrauchten. Dass auf dem Rechenbrette nach dekadischer Grundlage in jeder Reihe höchstens 9 Steinchen gelegt wurden, weil deren 10 nur durch ein Steinchen in der nächst folgenden Reihe angezeigt erschienen, ist an sich klar. Der griechische Abax, d. h. der Abax der Pythagoräer, war ein mit Staub bedecktes Brett. Sollte auf demselben gerechnet werden, so mussten mit einem Griffel darauf zuerst gegen den Rechner senkrechte Striche gezogen werden, wodurch Abtheilungen, Columnen genannt, gebildet wurden; weshalb man diese Art des instrumentalen Rechnens auch Columnenrechnen heißt.

Eine auf das Rechenbrett bezügliche Stelle bei Solon sagt: Wer bei Tyrannen Ansehen besitzt, ist wie der Stein bei der Rechnung, bald bedeutet er mehr, bald weniger; so achtet der Tyrann jenen bald hoch, bald gar nicht.

Die alten Römer, welche in allen von ihnen eroberten Provinzen, zu welchen auch Deutschland gehörte, die römische Cultur einzuführen bestrebt

[1]) Das Vorkommen der 4 Grundrechnungsarten in sprachlichen Zahlenbezeichnungen ersieht man aus den folgenden Beispielen: Addition: Lat. Undecim (1 + 10), duodecim u. s. w.; Französ. vingt-quatre (20 + 4) ... Subtraction: Duo de viginti, d. h. 2 von 20 für 18, eben so un de centum, 1 von 100, für 99 etc. Multiplication: Tresindstyve (3 × 20 im Dänischen); berroguei, d. i. 2 × 20 und pemzék-ugent, d. i. 15 × 20 im Baskischen; quatre-vingt, d. i. 4 × 20 im Französischen. Spuren von keltischen in die romanischen Sprachen übergegangenen Zahlwörtern finden sich noch heute, nämlich: Le quinze-vingts heißt das Armenhaus in Paris für 300, d. i. 15 × 20 Blinde. (Anmerkung in Pott S. 88.) Division: Dänisch. Halvtredsinstyve für 50, d. h. der dritte Zwanziger, welcher erst bei 60 voll wird, kommt hier nur zur Hälfte, d. i. mit 10 in Rechnung. Die dänische Zählweise verräth Spuren des Zwanziger-Systems, so wie die französische Zählweise in 80 = quatre-vingt und in 300 = quinze-vingts.

Additionen und Multiplicationen, die bei der großen Mehrzahl der Zählungs-Systeme vorkommen, sind somit ebenso alt als die Bildung der Zahlwörter selbst. Ebenso erweisen die Subtractionen und Divisionen ein hohes Alter durch ihre Anwendung bei Zahlwörtern verschiedener Sprachen.

Hosted by Google

waren, haben die Kenntnis des Rechnens aus griechischen Quellen erhalten, wie uns S. Isidorus von Sevilla in seiner aus dem Anfange des VII. Jahrhunderts herrührenden arithmetischen Schrift sagt, nach welcher die bezügliche Stelle in der Übersetzung lautet: Man hält dafür, dass Pythagoras bei den Griechen die Wissenschaft der Zahlen zuerst geschrieben habe, und dass sie dann von Nicomachus weitläufiger behandelt wurde; den Römern hingegen wurde sie durch Apulejus und Boëtius bekannt.[1])

Es lag nicht im Charakter der kriegerischen Römer, sich so wie die Griechen mit wissenschaftlichen Speculationen über Arithmetik zu befassen; deshalb haben sie das Rechnen nur von praktischer Seite aufgefasst und betrieben. Es ist geschichtlich bekannt, dass bei den alten Römern das Abacusrechnen einen Gegenstand des elementaren Unterrichtes bildete, bei welchem sie nach griechischem Muster ein mit Staub bestreutes Rechenbrett (Abacus) mit Hilfe eines Holz- oder Eisengriffels durch Ziehung von parallelen Strichen in Columnen eintheilten, in die sie Steinchen (*calculi* genannt) entsprechend der zu verrichtenden Rechnung legten. Neben diesem Columnen-Abacus gebrauchten die Römer auch einen Abacus mit Einschnitten, in welchen sich verschiebbare Knöpfchen befanden.

Auf dem Abacus konnten Additionen und Subtractionen leicht ausgeführt werden; wollte man jedoch multiplicieren oder dividieren, so musste man die Zahlen, mit welchen die letztgenannten zwei Operationen zu verrichten waren, schriftlich bei Seite sich anmerken, wonach der Abacus bei der Multiplication nur die Vereinigung der Theilproducte, und bei der Division die aus den Theilquotienten entstandenen Subtractionen vermittelte. Dabei war jedenfalls ein Kopfrechnen mit Benützung des Einmaleins nöthig; auch die Fingermultiplication ähnlich der auf S. 5 beschriebenen mag hierbei Anwendung gefunden haben. Das Einmaleins wurde von den Schülern in Gesangsform gemeinschaftlich eingeübt, so dass die einförmigen Töne des Hersingens die Vorübergehenden zu hören bekamen, welche häufig genug auch Misstöne vernahmen, die durch das Klatschen der Ruthe oder der Peitsche und durch das Heulen der in solcher Weise Unterrichteten erzeugt wurden.

Das vorerwähnte instrumentale Rechnen der Ägypter, Griechen und Römer ist schon ein vorgeschrittenes, auf ein bestimmtes Zahlen-System basiertes Rechnen. Bevor jedoch das Rechnen auf dem Rechenbrette seinen Anfang

[1]) Nicomachus, Neupythagoräer im Anfange des II. Jahrhunderts aus Gerase in Arabien, war als Arithmetiker berühmt; dessen Schriften „Theologumena arithmetica“ wurden übersetzt und erschienen bei Ast, Leipzig 1817.

Appulejus von Madaura in Afrika (zwischen 126—132 n. Ch. geb.) machte sich in Athen mit der griechischen Literatur bekannt und begab sich dann nach Rom, wo er Nicomachus' Einleitung in die Arithmetik in zwei Büchern ins Lateinische übersetzte; die Übersetzung ist jedoch verloren gegangen.

Über Boëtius sieh die Fußnote auf S. 33.

Hosted by Google

nahm, konnte in frühester vorgeschichtlicher Zeit bei den Völkern, die vom Zählen zum Rechnen eben erst übergiengen, das Rechnen sich bloß in kleinen Zahlen auf die einfachsten Grundverfahren des Zusammenzählens und Abziehens beschränken, wozu der Mensch die Rechenmaschine, welche er stets mit sich trägt, d. h. die Finger seiner Hände, benützte.

Fragt man nun, welche Art des Rechnens im Alterthume auf das primitive Fingerrechnen zunächst folgte, so finden wir für die Antwort die sichersten Daten in dem noch heute gebräuchlichen Rechnungsverfahren der uncultivierten Völker in Afrika und Amerika, welche sowohl mit den Fingern, als auch mit Hilfe von Steinchen, Muscheln und Getreidekörnern in abgezählten kleineren und größeren Häuflein rechnen, wie es die folgenden Citate aus den nachbenannten Werken näher angeben:

Den Beweis, dass die Neger in Afrika mit Häuflein aus Muscheln, Steinchen, Bohnen etc. zu rechnen verstehen, gibt Isert in seinem Werke „Reise nach Guinea“ S. 125, wo er erzählt: „Da kein einziger Neger Rechnen und Schreiben gelernt hat, so könnte man glauben, dass es den Handelsleuten ein Leichtes wäre, sie in den Preisen oder in der Zahl der Waren zu übervortheilen. Aber man irrt sich, wenn man das vermuthet. Der Neger rechnet nach den hier gebräuchlichen Cabes.[1]) Wenn der Neger große Summen in Bezahlung zu nehmen hat, die er in verschiedenen Sachen berechnen soll, z. B. einen Sclaven für 5 Benda, so zählt er so viele Boss, Bohnen oder türkische Weizenkörner ab, als diese 5 Benda in Cabes betragen, nämlich 5 mal 16, d. i. 80. Den Preis der Ware weiß er genau, und so legt er bei jedem Stücke, das er bekommt, so viele Boss zurück, als die einzelnen Stücke der Ware kosten; nach dieser Weise muss die Rechnung des Europäers mit der seinigen übereinstimmen. Für höhere Münzsorten legt er große Boss, für darauf folgende kleinere Sorten kleine Boss und türkische Weizenkörner bei Seite, und verwandelt so die höheren Geldsorten in die niederen.“

---

[1]) 1 Benda hat 2 Guanno à 2 Gua à 4 Cabes; also 1 Benda = 16 Cabes. Nahezu ist 1 Benda = 50 fl., 1 Cabes = 3 fl. Als Haupttauschmittel im Kleinverkehr dienen die Boss oder Kauris, sogenannte Schlangenkopfmuscheln, die bei größeren Beträgen in Körben gemessen werden. 40 Kauris heißen eine Schnur, 50 Schnüre ein Kopf und 10 Köpfe ein Korb. Diese Muschelmünzen (Kauris) der Neger kommen in ganzen Schiffsladungen von den Malediva-Inseln nach Ostafrika und werden von da nach Westafrika versendet. Am Niger gelten 800 Stück etwa 3 Francs. (Treuber's Nelkenbrecher der Jüngere 1877. S. 210.)

Die Kauris, welche schon seit uralter Zeit als Münze oder wenigstens als Handelsgegenstand gelten, sind eigentlich Schnecken (Porzellanschnecken), die fälschlich Muscheln genannt werden. Die Kauris sind gelblich oder weißlich, haben eine eiförmige Form und eine Länge von 1 bis 3 *cm*. Schon die ersten portugiesischen Seefahrer, welche an die westafrikanische Küste kamen, fanden dort die Kauris als Geld im Verkehre vor. Den Grund dafür, dass die Kaurismuschel sich Eingang als Münze verschaffen konnte, finden wir in ihrer Verwendung als Schmuck. Noch jetzt sieht man zuweilen bei uns die Riemen der Fleischer, an welche diese ihren Wetzstahl hängen, mit Kaurismuscheln geschmückt. (Andrees Welthandel, 1881, S. 24.)

Hosted by Google

Wie aus den Berichten über Amerika nach Gumilla, Tom. III., und P. Clavigero vom J. 1779 zu entnehmen ist, rechnen einige von jenen Indianerstämmen, die als Ackerbauer feste Wohnplätze haben, sowohl an den Fingern als in Häufchen mit Muscheln, Getreidekörnern oder gesammelten Steinchen derart, dass sie immer mit Zurückführung der Rechnungsart auf das Zählen das Resultat finden.[1]) Da detaillierte Angaben über diese Rechnungsweise mit Getreidekörnern oder Steinchen nicht vorliegen, so ist mit Hinsicht darauf, dass stets ein Zurückführen auf das Zählen den Grund zur Auffindung des Resultates bildet, dieses Rechnungsverfahren in Häuflein sicher mit dem früheren von Isert angegebenen Häuflein-Rechnen der Neger identisch, und dürfte sich in dem Rechnungsgange der nachfolgenden Beispiele charakterisieren:

1. Um eine größere Summe z. B. aus 57 + 39 zu bestimmen, die der Indianer mit Hilfe der Finger nicht zu finden glaubt, wird er das Resultat mit Rechensteinen oder Getreidekörnern finden, wenn er 57 gezählte Rechensteine oder Getreidekörner zu einem Häuflein und 39 Rechensteine für das zweite Häuflein nimmt, sodann vom kleineren Steinhäuflein je ein Steinchen wegnehmend und zum größeren legend der Reihe nach zählt: 58, 59, 60 .... bis 96 des letztgebliebenen Steinchens. Das nun einzige Steinhäuflein (oder Getreidekörner-Häuflein), welches beide Summanden 57 und 39 vereinigt, wieder nachgezählt, gibt dem Indianer den Beweis für die Richtigkeit des Resultates der Addition.

2. Die Aufgabe 43 — 18 berechnet der Indianer, wenn er 43 Steinchen oder Getreidekörner zu einem Häuflein vereinigt, davon 18 Stück wegnimmt und das Resthäuflein zählt.

3. Für kleine Multiplications-Aufgaben werden von Steinchen oder Getreidekörnern gleiche Häuflein je nach Größe des einen Factors, und zwar so viele gemacht, als der andere Factor angibt, sodann zu einem Häuflein vereinigt und gezählt, wobei die Summe als das Resultat der Multiplication erscheint.

---

[1]) Auch Gilj sagt von den Orinokanern im II. Bd., S. 332, dass sie in Häuflein mit Bohnen oder Getreidekörnern rechnen (fanno de mucchietti di fagioli o altri grani). In P. Mathias Steffels „Nachrichten über Amerika" I. Th., S. 369, ist zu lesen: Die Tarahumaren rechnen mit türkischen Weizenkörnern, oder kleinen Steinchen, welche sie entweder selbst abzählen oder zum Zählen darreichen. Sie sind darin den Brasilianern ähnlich. Auf das häufchenweise Abzählen weiset vermuthlich der Ausdruck tará (zählen, abzählen) hin; denn Abhäufen (in Haufen vertheilen) wird durch talá wiedergegeben, was davon kaum verschieden ist (Pott, I. Th. S. 10).

Eine interessante Bemerkung über die Vorstellung der Zahlengröße bei wilden Völkerstämmen findet man in Giljs Istor. Amer. T. III, p. 305. Der Missionär Gilj sagt: „Auf einen Negersclaven machte es nicht den geringsten Eindruck, als ich sagte, dass es unzählige viele Engel, Millionen auf Millionen, soviel wie Sterne, wie Blätter auf den Bäumen, wie Sand am Meere gebe. Aber höchst verwundert war der Neger, als ich ihm sagte, dass mehr Engel im Himmel seien, als Maiskörner in einer Fanega (ein Maisbehältnis der Indianer).

Hosted by Google

4. Um den fünften Theil von 67, d. h. das Resultat aus 67 : 5 zu finden, wird der Indianer 67 gezählte Getreidekörner (oder Steinchen) zu einem Häuflein vereinigen, davon 5 Stück wegnehmen und in entsprechenden Zwischenräumen reihenweise hinlegen; sodann wiederholt jedesmal Partien zu je 5 Stück von der zu theilenden Menge wegnehmen und davon zu jedem in einer Reihenfolge gebildeten Häuflein ein Stück zulegen. Nach der Wegnahme der letzten Fünfer-Partie findet er, dass noch 2 Stück als Rest übrig bleiben. Jedes gebildete Reihenhäuflein wird schließlich gleichviel, d. i. 13 gezählte Stücke enthalten müssen, wonach 13 als der fünfte Theil von 67 mit dem Reste 2 gefunden wird.

Wenn wir nun die Art des Zählens und Rechnens, welche bei den fast noch im Urzustande befindlichen einheimischen Racen Afrikas und Amerikas üblich ist, auch auf die in der Urzeit diese und andere Continente bewohnenden Völkerschaften übertragen, so dürften wir ein ziemlich getreues Bild vom Zählen und Rechnen in vorgeschichtlicher Zeit erhalten. Wir können demnach mit Hinsicht auf die Entwicklung des Rechnens in den ältesten Zeiten kurzgefasst den folgenden Schluss ziehen: Das in seinen Anfängen sich nur auf die einfachsten Grundverfahren des Zusammenzählens und Abziehens beschränkende Fingerrechnen fand später seine Erweiterung im Häufleinrechnen (mit Steinchen, Getreidekörnern u. s. w.), welches mit der Zeit zum instrumentalen Rechnen auf dem Abacus, Suanpan und Staubbrette führte, bei dem das bereits ausgebildete Fingerrechnen ähnlich wie das Kopfrechnen beim heutigen Zifferrechnen verwendet wurde, indem man die Finger zur Fixierung gewonnener Zahlen gebrauchte.

Hosted by Google

Fünfter Abschnitt.

Indische Rechenkunst nach Brahmagupta und Bhascara.

Vom VII. Jahrh. bis Mitte des XII. Jahrhunderts.

Nach den Ergebnissen langer Forschungen ist nun als unzweifelhaft festgestellt worden, dass der Ursprung unseres heutigen Rechnens in Vorderindien zu suchen ist. Zwei der ältesten bis jetzt bekannt gewordenen mathematischen Schriften, nämlich von Brahmagupta und von Bhascara Acharya geben uns Aufschluss über die Anfänge der indischen Arithmetik und Algebra. Die genannten Schriften, welche A. Colebrooke (Calcutta 1818) aus dem Sanskrit ins Englische übersetzt hat, sind metrisch verfasst, dabei sehr kurz und enthalten nur Aufgaben mit Auflösungen ohne methodische Erklärungen. Im nachfolgenden werden die genannten Schriften ihrer Wesenheit nach einer kurzen Betrachtung unterzogen.

a) **Ganitâdhjaja** (Rechenlehre) **und Kuttakâdhjaja** (Bruchlehre) **des Brahmagupta vom Jahre 628 n. Chr.**

Die Arithmetik des Brahmagupta enthält:

Regeln für die Grundrechnungsarten in ganzen Zahlen und für die Bruchrechnung. Das Verfahren des Quadrierens und Quadratwurzelausziehens aus ganzen und gemischten Zahlen.

Die Zins- und Gesellschaftsrechnung, die Regel de Tri, Proportionen, Berechnung von Dreiecken und Vierecken, stereometrischen Aufgaben und Berechnungen nach dem Schatten.

Einen näheren Einblick in das Wesen der indischen Rechenkunst geben die folgenden aus der Schrift des Brahmagupta entnommenen Fragmente:

Unter dem Wenigen, was über die Grundrechnungsarten mitgetheilt wird, zeigt sich nur bei der Multiplication eine gewisse Mannigfaltigkeit im Rechnungsverfahren. So werden mehrere Arten zu multiplicieren bei der Aufgabe 288×235 angegeben.

Hosted by Google

1. Art. — Der Multiplicand wird so oft wiederholt gesetzt als der Multiplicator Stellen hat. Dann multipliciert man einzeln mit den Ziffern des Multiplicators und addiert die Producte. Die Form der Ausführung war die nebenstehende:

288	2..	576..
288	3.	864.
288	5	1440
		67680

2. Art. — Der Multiplicand wird so oft wiederholt gesetzt, als man für den Multiplicator Summanden angenommen hat. So ist hier 235 ganz willkürlich zerlegt in $9+8+8+10+200$ und die Ausführung gestaltet sich so:

288	9	2592
288	8	2304
288	8	2304
288	10	2880
288	200	57600
		67680

3. Art. — Man setzt den Multiplicator unter den Multiplicanden und multipliciert entweder von links nach rechts, oder von rechts nach links, wobei aber der Multiplicator immer wiederholt wird. Der Ansatz war:

288
235.
235.
235

Man multiplicierte zuerst 200 im Multiplicanden mit 235, dann 80 mit 235 und schließlich 8 mit 335 und konnte dabei anfangen mit 2 mal 3 oder mit 5 mal 2. Fieng man mit dem zu unterst stehenden Multiplicator von rechts nach links an zu multiplicieren, so näherte sich das Verfahren dem jetzt gebräuchlichen, welches aber merkwürdigerweise in dieser Form weder bei den Indern noch bei den Arabern vorgefunden wird.

Das Verfahren der Division, wie es Brahmagupta lehrte, ist ein schwerfälliges und mühsames. Bei dem Abziehen der den einzelnen Ziffern des Quotienten entsprechenden Theilproducte wird vom Wegwischen vorhandener Ziffern, vom Ersetzen derselben durch andere u. s. w. gesprochen.

Das Wegwischen der Ziffern und Ersetzen durch andere bezieht sich auf die mit feinem Sande oder Staube bestreute Holztafel, auf welcher mit einem Griffel das Zifferrechnen ausgeführt wurde.

Die Bruchlehre wird bei Brahmagupta mit 4 Sätzen abgefertigt. Die Anschreibung der Brüche ist nicht verschieden von der heutigen, nur die Setzung des Bruchstriches fehlt; bei gemischten Zahlen stehen die Ganzen oberhalb des Bruches. So z. B.:

$\frac{5}{6}$ statt $\frac{5}{6}$ und $\overset{8}{\frac{5}{6}}$ statt $8\frac{5}{6}$.

Die vier Sätze (Regeln) für die Bruchrechnung lauten:

1. Zähler und Nenner mit dem entgegengesetzten Nenner multipliciert führt auf gleichbenannte Brüche. So

für $\frac{3}{5}$ und $\frac{7}{8}$ erhält man $\frac{3\times 8}{5\times 8}$ und $\frac{7\times 5}{8\times 5}$, d. i. $\frac{24}{40}$ und $\frac{35}{40}$.

Für die Addition und Subtraction galt: Bei der Addition werden die Zähler vereinigt; bei der Subtraction nimmt man ihren Unterschied.

Hosted by Google

2. Für die Verwandlung gemischter Zahlen in unechte Brüche: Ganze werden mit dem Nenner multipliciert und die Zähler addiert.

3. Für die Multiplication: Das Product aus den Zählern getheilt durch das Product aus den Nennern.

4. Für die Division: Nenner und Zähler des Divisors versetzt (den reciproken Wert des Divisors gen.), dann wird der Nenner des Dividenden mit dem Nenner und sein Zähler mit dem Zähler multipliciert. Gemischte Zahlen wurden in Brüche verwandelt, und wenn ein Divisionsglied eine ganze Zahl war, so machte man die Divisionsglieder in der Bruchform gleichnamig.

Begründungen des Rechnungsverfahrens werden in Brahmaguptas Schrift keine gegeben; doch Übungsaufgaben fehlen nicht. So findet man bei der Bruchrechnung die folgenden Aufgaben:

1. Von einem Oblongum, dessen Fläche $122\frac{1}{2}$ *(d. h.* $122\frac{1}{2}$*) und dessen Seite* $10\frac{1}{2}$ *ist, sage mir das Aufrechte (Höhe).*

2. $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}$ *von* $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{12}$ *von* $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ *von* $\frac{10}{4}$, $\frac{1}{5}$ *von* $\frac{7}{4}$ *und dazu noch* $\frac{3}{25}$*, sag schnell, wie viel das zusammen gibt.*

3. Ein kleiner Knabe erhält von einem Kaufmann $\frac{1}{4}$ *von einem Goldstück, kauft dafür Waren und handelt damit 6 Tage lang; er nimmt in dieser Zeit einen Betrag ein, welcher an jedem Tage bezüglich der ursprünglichen Summe und ihrer Hälfte, ihrem Drittel, Viertel, Fünftel, Sechstel und Siebentel gleich ist. Wie groß ist der Erlös?*

4. In welcher Zeit werden 4 Springbrunnen, zugleich steigend, eine Cisterne füllen, wenn sie dieselbe einzeln der Reihe nach in 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ *Tag voll machen?*

Diese Aufgabe, welche zur Einübung der Bruchrevision gegeben wurde, kommt unter verschiedenen Formen in allen unseren algebraischen Beispielsammlungen vor.

Ansatz und Auflösung erscheinen so geformt:

Annahme: . . . 1, 1, 1, 1, ... (Cisternen).

Einzeln dividiert jede Cisterne durch $1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}$

gibt: . . . $\left\{\begin{matrix}1 & 2 & 4 & 5\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{matrix}\right.$. Die Summe beträgt 12, weshalb so oft die Cisterne in 1 Tage gefüllt wird. Nun wird nach der Regel von drei (Regeldetri) gefragt: Wenn 12 Füllungen in 1 Tage erhalten werden, in welcher Zeit findet 1 Füllung statt?

Ansatz und Berechnung: $\frac{12}{1} \mid \frac{1}{1} \mid \frac{1}{1}$, d. h. $12 : 1 = 1 : x$.

Antw.: $\frac{1}{1}\frac{1}{2}$. In diesem Theile $(\frac{1}{1\,2})$ des Tages werden alle Springbrunnen zugleich die Cisterne füllen.

Die **Regeldetri** wird in vier Sätzen abgehandelt, wobei mit Hinsicht auf die Proportionsglieder das 1. Glied „Argument“ (Grund), das 2. Frucht und das 3. Forderung heißen. Argument und Frucht müssen gleichnamig sein.

Hosted by Google

Die vier Sätze lauten:

1. Forderung multipliciert mit der Frucht und dividiert durch das Argument, gibt die gesuchte Zahl.

Argum., Frucht, Forderung .... gesuchte Zahl (x).

1. 2. 3. Glied

$$\frac{\text{Forderung} \times \text{Frucht}}{\text{Argument}} = \text{gesuchte Zahl.}$$

Nach unserem Proportionssatze: ... Argum. : Frucht = Ford.: x.

2. Für die sogenannte umgekehrte Regeldetri: Frucht multipliciert mit Argument und dividiert durch die Forderung, gibt die gesuchte Zahl.

Forderung, Frucht, Argument ..... gesuchte Zahl.

(Argument, Frucht, Forderung in umgekehrter Reihenfolge.)

$$\frac{\text{Arg.} \times \text{Frucht}}{\text{Ford.}} = \text{gesuchte Zahl.}$$

Die Schwierigkeit, welche der Ansatz bei Aufgaben mit umgekehrten Verhältnissen macht, wurde dadurch vermieden, dass man die drei gegebenen Glieder in der gewöhnlichen Aufeinanderfolge der directen Regeldetri niederschrieb und dann die Glieder der vollständigen Proportion von rechts nach links las, wodurch das 3. Glied zum 1. und das 1. Glied zum 3. Glied gemacht wurde, wie es oben angezeigt erscheint.

3. Sind mehr als 3 Ausdrücke (Zahlen) gegeben, so findet ein Übergang der „Frucht“ auf beiden Seiten statt.

4. Das Product aus der größeren Anzahl Ausdrücke auf der einen Seite dividiert durch das Product der kleineren Anzahl Ausdrücke der anderen Seite gibt die gesuchte Zahl. Bei allen Brüchen findet Übergang der Nenner in gleicher Weise auf beiden Seiten statt.

Um den 3. und 4. Satz zu verdeutlichen, bedarf es eines Beispieles. Der Commentator gibt uns das Folgende an:

Das Interesse von 100 auf 3 Monate ist 10; man suche das Interesse von 60 auf 5 Monate.

Der Ansatz ist:

	100	60
	3	5
		10

Nun heißt es weiter: Versetzt man 10 auf die andere Seite, so erhält man einen Ausdruck dort mehr, welches Product dieser Seite, dividiert durch das der wenigeren (auf der linken Seite), nämlich 3000 : 300 die Antwort 10 als Interesse für 5 Monate gibt.

Der obige indische Ansatz, welcher der Reesischen Regel (aus dem XVII. Jahrh.) in auffallender Weise ähnlich ist, besteht in der Aufschreibung der Aufgabe in zwei aufrechtstehenden Reihen, wobei man schließlich nur noch zu beurtheilen hat, welche aus den gegebenen Zahlen der Aufgabe auf jene Seite zu stellen ist, die als Forderung (3. Gl. d. einf. Proport., die den Namen der gesuchten Zahl hat) der Dividendseite entspricht. Hierbei wird jedoch vorausgesetzt, dass die gegenseitig stehenden gleichnamigen Zahlen mit Hinsicht auf die Schlusszahl in geraden Verhältnissen stehen. Da nach

Hosted by Google

Satz 4. jene Reihe, die eine größere Anzahl Ausdrücke hat, für die Dividendseite anzunehmen ist, so bezeichnet „Übergang der Frucht“, dass je nach Umständen entweder die rechte oder die linke Reihe des Ansatzes als Dividend erscheinen könne.

Den weiteren Theil der Arithmetik des Brahmagupta übergehend, sei nur noch bemerkt, dass auch die 60theiligen Brüche (Sexagesimalbrüche) darin vorkommen; weshalb es noch unentschieden bleibt, ob sie die Inder von den Griechen oder diese von jenen übermittelt erhielten.

b) Aus der „Lilavati“ betitelten Arithmetik von Bhascara-Acharya.

Diese nach der Tochter des Bhascara benannte arithmetische Schrift aus der Mitte des XII. Jahrh., mit welcher der Verfasser das Mädchen über das Unverheiratetbleiben habe trösten wollen, hat eine große Ähnlichkeit mit der des Brahmagupta, ist aber vollständiger und reichhaltiger an Aufgaben. Die wenigen Regeln sind kurz und ohne Begründungen; die Art und Weise der Berechnungen wird durch allgemein gehaltene Angaben bezeichnet. Der eigentlichen Abhandlung über die Arithmetik geht eine Einleitung voraus, welche Erklärungen über Münzen, Maße und Gewichte bringt. Die Einleitung eröffnet Bhascara mit einer Vorrede, die er mit einer frommen Herzensergießung beginnt und in sehr naiver Weise mit dem Lobe seines eigenen Werkes beschließt. Er sagt darin:

„Nachdem ich mich vor der Gottheit gebeugt habe, deren Haupt ähnlich dem eines Elephanten ist, deren Füße mit Göttern verziert sind; die, wenn sich der Gedanke zu ihr erhebet, ihre Getreuen von Noth befreit und ihren Verehrern Glückseligkeit verleiht, lege ich dieses leichte Rechnungsverfahren vor, welches wonnevoll durch seine Eleganz, klar durch die bündige, weiche, sprachrichtige und den Gelehrten wohlgefällige Rede sich auszeichnet.“

Der eigentlichen „wonnevollen Arithmetik“, wie sie Bhascara nennt, schickt er eine nochmalige Erhebung seines Herzens zur Gottheit voraus, indem er laut Colebrookes Übersetzung schreibt: „Gruß dem Ganesa, strahlend wie der blaue und fleckenlose Lotus, und sich ergötzend an der zitternden Bewegung der dunkeln Schlange, welche sich ohne Unterlass um seinen Hals herum windet.....“

Die Arithmetik beginnt bei Bhascara mit der Numeration, dann folgen die Grundrechnungsarten, wozu noch das Potenzieren, Quadrat- und Cubikwurzelausziehen gerechnet werden. Die Addition und Subtraction werden mit dem knappen Satze abgefertigt: Man nimmt die Summe oder den Unterschied der Ziffern nach ihren Stellen von rechts nach links, oder von links nach rechts. Darauf folgen sogleich Aufgaben; eine derselben lautet:

Theuere, verständige Lilavati, sage mir, wenn du im Addieren und Subtrahieren geschickt bist, die Summe von 2, 5, 32, 193, 18, 10 und 100.

Hosted by Google

Der Ansatz und die Berechnung hat nach dem Commentator die folgende Form:

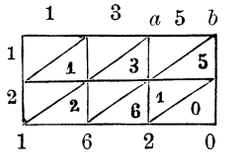
Summe der Einer	2, 5, 2, 3, 8, 0, 0	20
„ „ Zehner	3, 9, 1, 1, 0	14.
„ „ Hunderte . . .	1, 0, 0, 1	2.
	Gesuchte Summe	360

Für die **Multiplication** gibt der indische Verfasser noch andere Rechnungsverfahren an, als man beim Brahmagupta findet, die er an den folgenden Aufgaben zeigt:

Schöne, theuere Lilavati, die du Augen hast, wie ein junges Reh, sage mir, welche Zahl herauskommt bei 135 multipliciert mit 12, wenn du kennst, wie die Multiplication durch Ganze und durch Theile, durch Subdivision (d. h. durch Factoren), durch Absonderung der Stellen verrichtet wird.

Unter Absonderung der Stellen wurde verstanden, dass man mit jeder Ziffer des Multiplicators den darüber geschriebenen Multiplicanden multiplicierte.

I. Art.



Product 1 6 2 0

Die Einer der Producte aus den Ziffern des Multiplicators und Multiplicanden stehen unter, die Zehner oberhalb der Diagonale; wonach die Ziffern zwischen je zwei Diagonalen immer gleiche Stellenwerte haben, weshalb sie in den Diagonalstreifen addiert werden.

II. Art:

12	12	12
1	3	5
12		60
3		6
16		20

III. Art:

135	135
1	2
	270
	135
	1620

IV. Art:

135 20 2700
135 8 1080 (subtrahiert)
1620

Hier wird statt mit 12 mit der gleichen Differenz 20—8 multipliciert.

Die übrigen Multiplicationsformen finden sich auch beim Brahmagupta.

Was die **Division** betrifft, so wird diese beim Bhascara nicht besser als beim Brahmagupta gelehrt; denn ersterer erklärt das Divisionsverfahren mit dem sehr dürftigen und dunklen Satze: „Die Zahl, welche mit dem Divisor multipliciert, auch die letzte Zahl des Dividenden gleich macht, ist Quotient in der Division, wenn es angeht, verkleinere Divisor und Dividenden mit derselben Zahl und gehe zur Division über."

Die Division bereitete nicht allein auf dem Rechenbrette in den Zeiten der Abacisten, sondern auch in den auf sie folgenden Jahrhunderten dem Lernenden wegen des verwickelten Rechnungsganges stets ungemeine Schwierigkeiten, so dass in Italien — von wo aus die moderne Rechenkunst ihren Weg vorerst nach Frankreich und Deutschland nahm — im XV. Jahrhunderte das Sprichwort: „*dificile cosa è la partita*" (eine schwierige Sache ist das Theilen) vorherrschte.

Die Brüche behandelt Bhascara in gleicher Weise wie Brahmagupta, die Aufgaben erscheinen jedoch beim Ersteren verwickelter; so z. B.:

Hosted by Google

Jemand gab $\frac{1}{4}$ von $\frac{1}{16}$ des $\frac{1}{5}$ von $\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{3}$ der Hälfte des Drachmenstückes einem Bettler; sage mir, wenn du in der Subdivision der Brüche bewandert bist, wie viel der Geizhals gab?

Die zusammengesetzte **Regeldetri** wird bei Bhascara und auch bei arabischen Mathematikern in mehrere einfache Regeldetri-Sätze zertheilt und zu einer Regel mit mehreren Verhältnissen erweitert. Aus Bhascaras Regeldetri-Aufgaben bringen wir die folgenden:

1) Eine weiße Ameise bewegt sich in einem Tage um die Länge von 8 Gerstenkörnern weniger $\frac{1}{5}$ eines solchen vorwärts; sie kriecht in 3 Tagen um $\frac{1}{20}$ Finger zurück; in welcher Zeit wird sie eine Yojana weit vorrücken?

Die Verhältniszahlen sind: 8 Gerstenkörner = 1 Finger, 24 Finger = 1 Elle, 4 Ellen = 1 Stab, 8000 Stab = 1 Yojana.

2) Eine 16jährige Sclavin kostet 32 Nishkas, wie viel wird eine 20jährige kosten? (Colebrooke pag. 34.)

Diese Aufgabe wurde nach umgekehrter Proportion behandelt, weil der Wert der Sclaven sich gewöhnlich bei Überschreitung eines bestimmten Alters nach deren Jahren so regelte, dass je älter das zu Sclavendiensten verkaufte Individuum war, desto kleiner dessen Wert angenommen wurde.

Für die sogenannte Inversion (Umkehrung) und Position (für eine angenommene Zahl), oder „Regula falsi“ wie man diese später hieß, die fast in keinem Rechenbuche bis ins XVII. und XVIII. Jahrhundert hinein fehlte, hat Bhascara zwei neue Auflösungsmethoden aufgestellt. So gibt er für die Inversion die folgende Regel an:

„Willst du eine Zahl aus anderen gegebenen finden, so mache den Divisor zu einem Multiplicator, diesen zu einem Divisor; das Quadrat zur Wurzel, diese zum Quadrate; verwandle negativ in positiv und positiv in negativ.“ Mit anderen Worten: Von der gegebenen Zahl ausgehend hat man schrittweise immer die entgegengesetzten Operationen von denjenigen vorzunehmen, welche man gemacht hat, um auf die gegebene Zahl zu kommen.

Bhascara zeigt die Inversion an der folgenden Aufgabe:

Niedliches Mädchen mit den glitzernden Augen, sage mir, wenn du die Inversionsmethode kennst, welche Zahl multipliciert mit 3, addiert zu $\frac{3}{4}$ des Productes, getheilt durch 7, reduciert durch Subtraction von $\frac{1}{3}$ des Quotienten, dann multipliciert mit sich selbst, 52 von dem Producte abgezogen, davon die Quadratwurzel genommen, 8 addiert und die Summe durch 10 getheilt, 2 als die fragliche Zahl gibt.

In der Rechnungsform werden zuerst die Angaben gesetzt: 3 als Multiplicator, $\frac{3}{4}$ additiv, 7 als Divisor .... etc., dann heißt es: wenn man nach Vorschrift verfährt, findet man die Zahl 28 als Resultat. Weiter findet man zur Erklärung des Rechnungsganges nichts angegeben.

Der Rechnungsgang dieser Aufgabe ist der folgende:

$(2.10-8)^2 + 52 = 196$, $\sqrt{196} = 14$ und $14 \times 1\frac{1}{2} \times 7 \times \frac{4}{7} : 3 = 28$.

Hosted by Google

Die Regel für die Positionsrechnung lautet so: Eine willkürlich angenommene Zahl wird behandelt, wie die vorliegende Aufgabe es zeigt: multipliciert, dividiert, potenziert oder um einen aliquoten Theil ihrer selbst vermindert; mit dem was man erhält, wird das Product der gegebenen Zahl in die angenommene dividiert und der Quotient ist die gesuchte Zahl. So z. B.

Aus einem Haufen reiner Lotusblumen wurden $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ *und* $\frac{1}{6}$ *beziehungsweise den Göttern Siwa, Vischnu und der Sonne dargebracht. Die 6 übrigen Lotusblumen wurden einem würdigen Lehrer gegeben; sage schnell die ganze Zahl der Blumen.*

Die Auflösung ist in der kurzen Form gefasst: „Annahme $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$. Nimmt man die Zahl 1 an und verfährt wie oben, so findet man 120.“ — Zieht man von 1 die Summe der gegebenen Brüche ab, so bleibt $\frac{1}{2\,0}$; dieses $\frac{1}{2\,0}$ beträgt nach Aufgabe 6; also das Ganze 120; d. h.:

Die gesuchte Zahl wird gefunden, wenn man die gegebene (hier 6) mit der angenommenen 1 multipliciert und das Product durch die Zahl dividiert, welche man erhält, wenn man die beliebig angenommene Zahl (die Position) vorschriftsmäßig behandelt hat.

Auf die Regeldetri lässt Bhascara verschiedene Arten von praktischen Aufgaben folgen, als: Zins-, Gesellschafts-, Kaufs- und Alligations-Rechnungen, an die sich die Permutationen und Combinationen, die arithmetischen und geometrischen Progressionen, geometrische Berechnungen und die Auflösung der Gleichungen anschließen. Aus letzteren bringen wir das folgende Beispiel:

„*Von einem Schwarm Bienen lässt* $\frac{1}{5}$ *sich auf einer Kadambablüthe,* $\frac{1}{3}$ *auf der Silindhablume nieder. Der dreifache Unterschied der beiden Zahlen flog nach den Blüten einer Kutaja, eine Biene blieb jedoch übrig, welche in der Luft hin und her schwebte gleichzeitig angezogen durch den lieblichen Duft einer Jasminblüte und eines Pandamus. Sage mir nun, reizendes Mädchen, die Anzahl der Bienen.*“

Die theoretische Behandlung des arithmetischen Theiles, so wie die Berechnungen praktischer Aufgaben stimmen im wesentlichen mit der Arithmetik des Brahmagupta überein; wonach der Fortschritt innerhalb der fünf Jahrhunderte von diesem bis zu Bhascara nicht bedeutend zu nennen ist.

Wie die Inder rechneten, bevor sie das Stellen-System kannten, darüber ist man bis heute noch nicht im klaren. Nicht die leisesten Andeutungen sind aufgefunden worden, dass bei den Indern vor Zeiten ein Fingerrechnen oder ein instrumentales Rechnen stattgefunden hätte. Doch dies berechtigt noch nicht zu dem Schlusse, dass die Inder vor der ältesten schriftlichen Bezeichnung der Zahl durch Buchstaben weder die Fingerbeugungen noch ein mechanisches Hilfsmittel beim Rechnen gebrauchten, sondern wesentlich Kopfrechnen übten, welches naturgemäß sich nicht zu verändern brauchte, als die Positionsarithmetik erfunden wurde. Vielmehr liegt es außer allem Zweifel, dass die ersten Anfänge des Rechnens bei den Indern im Fingerstrecken und Fingerbeugen zu suchen sind, da sich das primitive Kopfrechnen ohne Hilfe der Finger bei den Indern eben so wenig wie bei andern Völkern denken lässt.

Hosted by Google

Sechster Abschnitt.

Indisch-arabische Rechenkunst.

Vom IX. bis XVI. Jahrhunderte.

Die alte Stadt Bagdad, Residenzstadt der Khalifen, wurde seit 770 zum Sammelplatze der Gelehrten verschiedener Länder. Theils waren es gelehrte Inder, theils nestorianische Christen, welche in der Eigenschaft als Leibärzte der Khalifen gar bald zu hohem Ansehen kamen und ihren Einfluss zum Besten wissenschaftlicher Entwicklung auf griechischer Grundlage benützten. Im Jahre 773 kam eine Gesandtschaft aus Indien an den Hof des Khalifen Almansur zu Bagdad, und brachte, nebst astronomischen Tabellen, wahrscheinlich auch eine Abhandlung über die indische Rechenkunst dahin, die man für leicht, schnell und sinnreich erklärte und welche, wie ein späterer arabischer Schriftsteller sich ausdrückt, ein schöpferisches Talent, überlegene Urtheilskraft und einen erfinderischen Geist beweist (Wöpke, 238 und 480). Auf diese Arbeit gründete der arabische Mathematiker Mohammed ben Musa unter dem Khalifen Al-Mamun seine weit verbreitete Arithmetik, beiläufig um das Jahr 820, wobei er in der arabischen Umarbeitung ohne Zweifel auch die Schrift des Brahmagupta benützte, die vorher von den Arabern gekannt und angewendet wurde. In der Arithmetik des Mohammed ben Musa heißt es ausdrücklich, dass die Inder die Numeration mit neun Zeichen ausführen, die dazu dienen, die größte und die kleinste Zahl auszudrücken, um Mühe und Arbeit zu erleichtern.

Unter der zwanzigjährigen Regierung (813—833) des Khalifen Al-Mamun erlangte die bisher blühende Wissenschaft ihre Reife. Es wurden in größeren Städten Schulen und in Bagdad eine Akademie errichtet. Da Al-Mamun die griechische Bildung hoch schätzte, so wurde unter ihm bei den Arabern die Mathematik der alten Griechen immer mehr und mehr verbreitet. Auf sein Geheiß wurden Aristoteles, Euklides, Archimed, Apollonius und Ptolemäus übersetzt, und es ist bekannt, dass einige dieser Schriften dem Occidente erst durch Rückübersetzungen aus dem Arabischen wieder in Erinnerung gebracht wurden.

(Cantors Kulturleben der Völker. S. 265.)

Hosted by Google

Wie uns geschichtliche Daten bestätigen, sind bereits im II. Jahrh. n. Chr. die indischen Zahlzeichen nach Alexandria gekommen, von wo sie sich in ihrer Anwendung beim Columnenrechnen nach Rom und auch nach dem Westen Afrikas verbreiteten. Im VIII. Jahrh. lernten die Araber des Ostens die indischen Zahlzeichen in bereits wesentlich veränderter Gestalt mit der Nulle kennen. Die Nulle nannten sie as-sifr d. h. das Leere, als Übersetzung von sunga, wie die Null bei den Indern hieß. Im Westen nahm man zwar die Nulle auf, blieb aber den alten indischen Zahlzeichen mit alexandrinischen Charakteren treu, die man Gobârziffern nennt, d. h. Staubziffern, weil man in jener Zeit auf mit Staub bedeckten Platten zu rechnen pflegte.

Dass die Araber die Positionsarithmetik von den Indern erhalten haben, darüber kann kaum ein Zweifel erhoben werden. Da sie aber ungefähr in derselben Zeit, in welcher sie mit der indischen Rechenkunst bekannt wurden, auch griechische Mathematiker kennen lernten, so ist es nicht zu verwundern, dass auch Anschauungen der letzteren in arabischen Schriften vorkommen. Da finden wir Multiplicationsmethoden, welche an die des Apollonius und des Archimed, wie sie von Pappus uns berichtet werden, vielfach erinnern. An einer andern Stelle finden wir die Definition der Multiplication selbst fast wörtlich wie bei Euklid, und genau nach ihm bringt wieder ein anderer Schriftsteller eine ausführliche Proportionslehre, welche gewissermaßen als theoretische Grundlage der nach praktischen Bedürfnissen eingerichteten Regeldetri vorausgeschickt wird. Häufig findet man in arabischen Schriften die Berechnungen mit Sexagesimalbrüchen, insbesondere die Ausziehung der Quadratwurzel aus denselben genau so, wie sie bei Ptolemäus in Übung war.

In Wöpke's Journ. asiat. I. pag. 489 werden eine Reihe arabischer Schriften angeführt, welche auf die vorerwähnte Arithmetik des Mohammed ben Musa folgten. Genanntes Manuscript glaubt man in einer lateinischen Übersetzung oder Umarbeitung aus dem Anfange des XII. Jahrhunderts des englischen Mönchs Adelhart von Bath, der wissenschaftliche Reisen nach Spanien, Egypten und Arabien gemacht hatte, wieder zu erkennen (Mathem. Beiträge Cantor's, 1863, S. 268, Wöpke, S. 481).

Die Thatsache, dass Adelhardt von Bath um das Jahr 1120 die erste Übersetzung des Euklid aus dem Arabischen unternahm, führte zu der Annahme, dass er auch der Übersetzer von der arithm. Abhandlung des Mohammed ben Musa sei. Nach Cantor enthält diese Schrift: Die Numeration mit den 9 Ziffern und der Nulle ausführlich beschrieben; dann kommen die 6 Species: das Addieren, Subtrahieren, Medieren (Halbieren), das Duplieren, das Dividieren und endlich die Brüche. Beim Addieren, Subtrahieren und Duplieren wird links, beim Medieren aber rechts angefangen; also in einer unserem Verfahren entgegengesetzten Ordnung. Neu ist die Neunerprobe, die sich weder bei Brahmagupta, noch bei Bhascara vorfindet. Wöpke (Jour. asiat. I. pag. 150) meint, sie sei indischen Ursprunges; andere hingegen, wie Taylor, theilen nicht diese Meinung.

Der Raum gestattet mir nicht, die von Wöpke noch angeführten arabischen Schriften hier zu erörtern. Als Schlusstein in der Entwicklung der arabischen Rechenkunst kann gewissermaßen die aus dem XVI. Jahr-

Hosted by Google

hunderte stammende „Essenz der Rechenkunst von Behâ-Eddin[1])“ angesehen werden, welche deutsch von Nesselmann bei G. Reimer in Berlin 1843 erschien.

Die Schrift von Behâ-Eddin steht heute noch in Vorderasien in großem Ansehen und wird noch in fast unverändertem Abdrucke als Schulbuch für die Algebra, welche darin enthalten ist, benützt. Es soll, nach dem Plane des Verfassers, das Nothwendigste der Rechenkunst enthalten, „deren Wesen (nach den Worten des Verfassers) so erhaben, deren Rang so hoch, deren Aufgaben so zierlich, deren Beweise so fest sind ....“. Das Werk wird eröffnet durch den folgenden Gottes-Hymnus: Im Namen Gottes, des Barmherzigen, des Erbarmers; dessen Gnadensonne keine Zahl begrenzt und dessen ohne Ende wiederholte Theilungen zu keinem Ende führen; nach welchem sich nennen darf der Arme in Vergleich zu Gott, dem reichen, Behâ-Eddin Mohammed, Sohn des Alhossain aus Amul, den Gott der Erhabene möge sprechen lassen, was sich als wahr noch erweist am Tage, da Rechnung gelegt wird.“ Darauf folgt eine kurze Einleitung, welche die ersten Begriffe der Zahl und der Rechenkunst feststellt. Das eigentliche Rechnen wird mit den früher schon genannten 6 Species in ganzen Zahlen eröffnet. Beim Addieren und Duplieren, Subtrahieren und Addieren fangen die Operationen von rechts nach links an; es wird hierbei bemerkt, dass man auch in der entgegengesetzten Richtung die Rechnung machen könne, bei diesem Verfahren entstehe jedoch durch das Wegstreichen und Corrigieren der Ziffern eine unnütze Weitläufigkeit. Beweise für die aufgestellten Regeln gibt das Buch nicht.

Die Multiplication findet man auch hier mit großer Weitläufigkeit behandelt. Interessant sind für uns jene Multiplications-Regeln, welche zur Auflösung der sogenannten „ausgezeichneten Aufgaben“ führen. Wir finden sie wieder bei den christlichen Schriftstellern des Abendlandes, und zwar vom XV. Jahrhundert an; ihr Zweck war größtentheils die Umgehung der Erlernung des Einmaleins für die höheren Einheiten.[2])

Von diesen an sich unpraktischen Multiplications-Regeln bringe ich beispielsweise nur die zwei nachfolgenden:

Regeln für die Multiplication zwischen 5 und 10.

1. Nimm den einen Factor 10 fach und subtrahiere davon das Product desselben in den Überschuss der Zahl 10 über den andern Factor. Z. B.:

Wie viel ist 8 mal 9?

---

[1]) Dieser orientalische Mathematiker lebte in den Jahren 1547 bis 1622. Der Titel seines Werkes lautet: Chulâsat al hisâb, d. i. Essenz der Rechenkunst; es enthält einen Auszug aus Büchern älterer Schriftsteller.

[2]) Die Erlernung des Einmaleins wurde noch im Anfange des XVIII. Jahrhunderts als eine Herkulesarbeit von allen im Zahlenmerken ungeübten Rechnern betrachtet; deshalb erfand man allerlei mechanische Mittel, auf die wir später zu sprechen kommen werden, um die Erlernung des Einmaleins umgehen zu können.

Hosted by Google

Antw. Man subtrahiert von 90 das Product 9×2, oder von 80 das Product 8×1, so ist der Rest in beiden Fällen **72** als die gesuchte Zahl.

Die Richtigkeit dieser Regel ergibt sich leicht, wenn man den einen oder den andern Factor als Differenz darstellt. So ist $8 \times 9 = (10-2)\,9 = 90-2.9 = 10.\,9 - (10-8)\,9$; diese Form entspricht genau der Regel.

2. Addiere die beiden Factoren, nimm den Überschuss der Summe über 10 zehnfach und dazu addiere das Product der Überschüsse von 10 über jeden Factor, z. B.:

Wie viel gibt 7×8?

Antw. 7 und 8 gibt 15; 5 mal 10 gibt 50, dazu $2 \times 3 = 6$ (Ergänzungen der Factoren zu 10, miteinander multipliciert); somit 50 und dazu 6 gibt **56** als die gesuchte Zahl.

Neben diesen Regeln werden auch Kunstgriffe bei der Multiplication angegeben, die sich als wirkliche Vortheile und Abkürzungen erweisen, und noch heute ihre Anwendung finden. Z. B.:

Wenn einer der Factoren ein einfacher Bruchtheil von 100 oder von 1000 ist, so dividiere mit dem Nenner und dann multipliciere mit 100 oder 1000.

So ist $25 \times 24 = {}^1/_4 \times 100 \times 24 = \frac{24}{4} \times 100 = 600$

und $125 \times 32 = {}^1/_8 \times 1000 \times 32 = 4 \times 1000 = 4000.$

Auch die Multiplication mit den Factoren des Multiplicators findet sich in dem genannten Werke, was der arabische Schriftsteller für einen speciellen Fall bezeichnet. Z. B.:

Wie viel geben 25×16.

Antw. $(25 \times 2 \times 2).\ 4 = 100 \times 4 = 400.$

Bei größeren Zahlen, bemerkt er, müsse man das Schreiben zu Hilfe nehmen. Nun folgen für die verschiedenen Fälle die Regeln.

In der Multiplication einer mehrzifferigen Zahl mit einer einzifferigen gebrauchte man mehrere Formen; die gebräuchlichste

$$\text{davon war } \left.\begin{matrix} 5 \\ 62045 \\ 310215 \end{matrix}\right\} \text{ anstatt } 62043 \times 5 = 310215$$

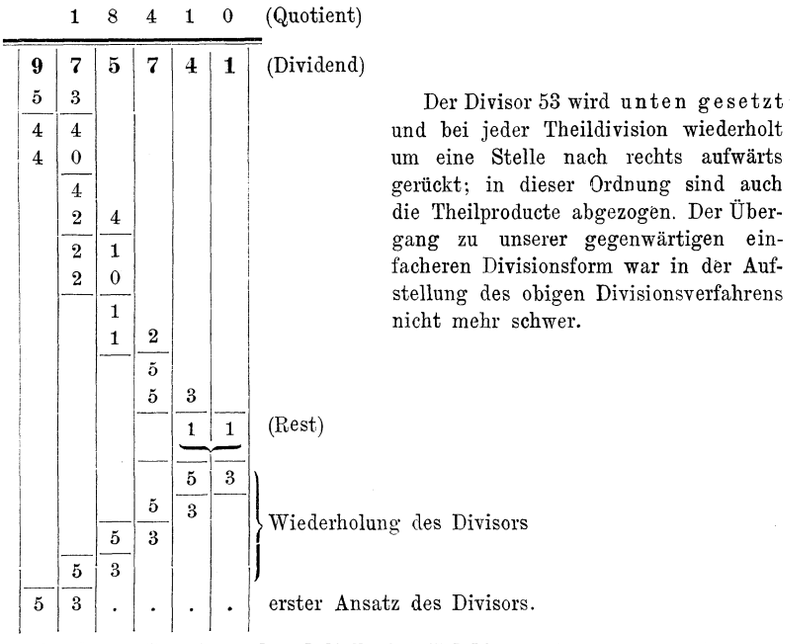
Unter den Regeln für die Multiplication, wenn beide Factoren mehrzifferig sind, findet man auch die Regel des Columnenrechnens, wie sie bereits bei Bhascara angeführt wurde.

Bei der Division wird die Erklärung gegeben: „Die Division ist die Aufsuchung einer Zahl, die sich zu der Einheit verhält, wie der Dividend zum Divisor, und das Umgekehrte der Multiplication ist. Z. B.:

Welche Zahl erhält man, wenn 975741 durch 53 getheilt wird?

Hosted by Google

Das Divisionsverfahren zeigt mit dem heutigen Rechnungsgange viel Ähnlichkeit. Das Schema war hierbei das folgende:



Der Divisor 53 wird unten gesetzt und bei jeder Theildivision wiederholt um eine Stelle nach rechts aufwärts gerückt; in dieser Ordnung sind auch die Theilproducte abgezogen. Der Übergang zu unserer gegenwärtigen einfacheren Divisionsform war in der Aufstellung des obigen Divisionsverfahrens nicht mehr schwer.

Die verschiedenen Species behandelt Behâ Eddin nach vorausgeschickten kurzen, meist klaren Regeln, die alle Fälle berücksichtigen. Die Brüche werden durch dieselben Grundrechnungsarten wie bei ganzen Zahlen durchgeführt. Die Behandlung derselben ist kurzgefasst und nicht ganz ohne methodischen Gang. Der übrige Theil des kleinen Werkes hat durchaus eine praktische Anlage. Die Berechnung der verschiedenen Aufgaben geschieht durch die Proportionen, durch die Regula falsi, durch die Umkehrung (Inversion) und endlich auch in algebraischer Weise. Die Überschrift des letzten Capitels lautet: „Vermischte Aufgaben, welche den Geist des Lernenden schärfen und in der Aufsuchung der Unbekannten befestigen sollen.“ Beweise des Rechnungsverfahrens finden sich keine in dem genannten Werke. Das Schlusswort des Behâ Eddin an den Leser lautet: „Wisse, o Bruder, du edler, der du nach den Kostbarkeiten der Aufgaben verlangt hast ..... Lob sei dem Herrn, der die Vollendung begünstigt und zum Schlusse geholfen hat“.

Jahrhunderte hindurch hatten die Araber in der Rechenkunst einen mächtigen Vorsprung vor den Europäern erlangt; doch mit dem Mathematiker Behâ Eddin endete deren Fortschritt auf diesem Gebiete, während bei den Europäern die indische Positionsarithmetik vom XVI. Jahrhunderte an mit einem immer rascheren Gange ihrer Fortentwicklung zueilte.

Hosted by Google

Siebenter Abschnitt.

Das Rechnen mit Hilfe eines Rechenapparates bis Mitte des XVI. Jahrhunderts.

(Instrumentales Rechnen.)

I. Der Abacus.

a) Der Abacus (Rechenbrett) der Chinesen.

Über die von den alten Culturvölkern im Verkehrsleben angewandte Rechenkunst ist uns nur weniges bekannt. Bei der Unbehilflichkeit ihrer Zahlzeichen konnten sie nicht in so einfacher Weise rechnen, als es später durch den Gebrauch der arabischen Ziffern ermöglicht wurde; sie bedienten sich eines sinnlichen Hilfsmittels, nämlich eines Rechenbrettes, „Abacus“ genannt. Der Abacus war eine Tafel von Holz, Stein oder Metall, mit einer Anzahl gleichlanger, paralleler Einschnitte, in welchen sich, durch Knöpfe vor dem Herausfallen geschützt, hin und her bewegliche Stifte befanden. Man gab dem Abacus auch die folgende Gestalt: Auf dem rechteckigen Brette war ein Rahmen befestigt, und statt der Einschnitte waren in den Rahmentheilen Drahtsaiten oder Schnüre mit daran beweglichen kleinen Kugeln gespannt. Dies war die Form des bei den Chinesen und mehreren anderen asiatischen Völkerschaften noch jetzt üblichen Rechenbrettes.

Über den Abacus der Chinesen entnehmen wir aus der Schrift „Memoria sulle cifre arabiche, Milano 1813, presso G. Pirotta“, dass die Chinesen sich ihrer Holz-Rechenmaschine bedienen, weil sie mit derselben, wie P. Semedo bestätigt, ihre Rechnungen mit großer Leichtigkeit und Abkürzung machen. (J Cinesi servonsi della loro macchina di legno, perchè con essa, come i P. Semedo attesta, essi fanno i loro conti con gran facilità e brevità.)

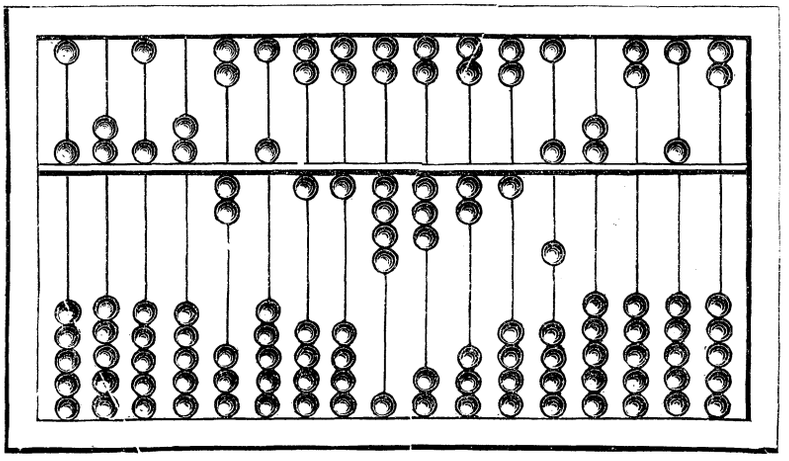
Aus dem vorbenannten Werke entnehmen wir ferner S. 67, dass der berühmte Missionär von China, P. Martini, wie er versichert, sich dieser chinesischen Rechenmaschine öfter bedient, und mit deren Hilfe ohne Papier und Tintenfass abgekürzt seine Rechnungen gebildet habe.[1]) Ebenso ein

[1]) Un Missionario celebre della Cina, il P. Martini, ci assicura di essersene servito piu volte; tanto più che senza carta e calamaro, egli ha potuto piu compendiosamente formare i suoi calcoli.

Hosted by Google

englischer Mathematiker, von China zurückgekommen, welcher sah, mit welcher Einfachheit, Klarheit und Leichtigkeit mittelst dieser Rechenmaschine gerechnet werden könne, sagte: „es wäre zu wünschen, dass sie auch von den Europäern angewendet würde.“ [1])

Die Darstellung, wie die Chinesen mit ihrem Abacus (von ihnen Suan-pan genannt) zu rechnen pflegen, lässt sich hier wegen des eng begrenzten Raumes dieser Blätter nicht geben, weshalb nachfolgend nur die Abbildung dieser Rechenmaschine erscheint, die beim Rechnen in horizontaler Richtung auf einem Tische liegt, oder wagrecht in der Hand gehalten wird.



Chinesische Rechenmaschine in horizontaler Lage mit der Stellung der Rechenkugeln nach einer beendeten Rechnung.

Graf d'Escayrac, den Kaiser Napoleon III. im Jahre 1859 mit einer wissenschaftlichen Mission nach China betraut hatte, sagt in seinem Berichte: „.... Die Chinesen führen die Rechnungen des praktischen Lebens auf ihrem Suan-pan mit unglaublicher Geschwindigkeit aus. Ich selbst bin kein schlechter Rechner, und doch haben Chinesen, die nicht zum Handelsstand gehören, zu Aufgaben, die ich ihnen gab, ein Drittel oder die Hälfte der Zeit weniger gebraucht, als ich. Die Kinder lernen in zwei Monaten sich des Suan-pan mit großer Schnelligkeit bedienen. Man findet den Suan-pan bei allen öffentlichen Verwaltungen, wie auch in allen Schreibstuben der europäischen Kaufleute, wo Chinesen als Cassiere angestellt sind“. In der obigen Abbildung des Suan-pan ist ersichtlich, dass in dem unteren größeren Theile je eine in dem

[1]) Un Matematico inglese, ritornato da quell' Impero (Cina), vedendo la semplicità, la chiarezza, e la facilità, con cui si fanno, mediante questa macchina, i conti: sarebbe da desiderarsi, dice, che si adottasse anche dagli Europei.

Hosted by Google

Rahmen gespannte Drahtsaite fünf Kugeln enthält, deren jede die Einheit (1) bedeutet, in dem oberen Rahmentheile enthält hingegen jeder Draht nur zwei Kugeln, deren jede fünf darstellt; so dass in jedem ganzen Drahte fünfzehn Einheiten enthalten sind, was eigentlich besser für ein Sechzehnersystem als Zehnersystem passen würde.

Es soll in China auch Suan-pan geben, die in ähnlicher Weise wie der römische Abacus unten vier Kugeln, und in der oberen Abtheilung eine Kugel, welche fünf bedeutet, enthalten; doch diese Art Suan-pan, obzwar sie systematisch richtiger sind, werden in der Praxis weniger bequem gefunden.

---

b) Der Abacus der Ägypter, Griechen und Römer.

Der **Abacus**, dessen sich schon die Ägypter und später in etwas veränderter Form auch die Griechen und Römer bedienten, hat ohne Zweifel seinen Ursprung in China. Den Ägyptern dürften die Griechen ihren Abacus nachgebildet haben, und weil sie denselben schon zur Zeit des Pythagoras zu arithmetischen Operationen gebrauchten, so dürfte sich die Veranlassung gefunden haben, den „Abacus der Griechen“ auch Abacus Pythagoricus, oder Pythagoräische Tafel (fälschlich Einmaleins) zu nennen.

Dass der Abacus zur größeren Bequemlichkeit beim häuslichen Rechnen auch in der Form eines Tisches eingerichtet war, ergibt sich aus den Mittheilungen Cantors (S. 132), nach welchen im Jahre 1846 zu Salamis ein marmorner Rechentisch aus der Römerzeit aufgefunden wurde.

Bei dem Culturstande der alten Römer lässt sich annehmen, dass sie schon in frühester Zeit das Rechnen sowohl im öffentlichen als im Privatleben nicht entbehren konnten. Überdies haben sie die Kenntnis der Arithmetik bei einem jeden vorausgesetzt, der nur einigermaßen auf Bildung Anspruch machen wollte. Dass man in den späteren Zeiten das Rechnen auf dem Abacus in den Kreis des Elementarunterrichtes einbezogen habe, ergibt sich schon aus den Confessionen des h. Augustinus (geb. 354 zu Taguste in Numidien), in welchen er sagt, dass ihm das „unum et unum duo, duo et duo quatuor“ ein verhasster Gesang sei. Es scheint demnach, dass die Vorübungen für das Abacusrechnen chorweise von den Schülern gesprochen wurden

Über die Zeit, wann die Griechen und Römer das Abacusrechnen begonnen haben, lassen sich keine bestimmten Daten ausführen.

Die Römer, welche zuerst eine höhere geistige Cultur — die griechisch-römische — in den eroberten Ländern verbreiteten, haben ohne Zweifel in den größeren Städten Schulen nach dem römischen Muster errichtet und in denselben die von ihnen hochgehaltene Kunst des Abacusrechnen eingeführt.

Hosted by Google

Unter Karl dem Großen (768—814) und mit der Vermehrung der Klöster und ihrer Schulen beginnt die erste Entwicklungsperiode des Schulwesens und auch des Rechnens auf den Fingern, verbunden mit dem Abacusrechnen; denn die Klöster konnten das Rechnen, insoweit sie es zur Führung der Kirchen- und Wirtschaftsrechnungen nöthig hatten, nicht entbehren. Man kann somit mit Sicherheit annehmen, dass dort, wo eine Klosterschule bestand, auch die Anfänge des Rechnens nach der damaligen Methode gelehrt wurden.

Diese Schulen waren bis zum 14. Jahrhunderte die einzigen, deren Lehrer den Samen der Bildung, wenngleich sparsam, so doch segensreich in das Land gestreut haben.

Die Geschichte der auf den Abacus sich stützenden Rechenkunst lässt sich bis in das 12. Jahrhundert verfolgen; doch von da an verschwinden die Schriften über den Abacus. Bei den arithmetischen Schriften des 13. Jahrhunderts findet man zwar auch hin und wieder den Titel „Abacus“, aber dieser Ausdruck wird schon in dem allgemein eingebürgerten Begriffe „Rechenkunst“ aufgefasst, welche nicht mehr die römische, sondern die indisch-arabische (Positionsarithmetik) ist. Die darüber geschriebenen Abhandlungen führen gewöhnlich den Titel Algorismus oder Algorithmus, welche Benennung von Alkharizmi, einem Beinamen des Mohammed ben Musa herrührt, dessen Werk über die indische Arithmetik von den spanischen Arabern vorzugsweise benützt und den abendländischen Christen zuerst bekannt gemacht wurde.

Die bedeutendste arithmetische Schrift aus dem 13. Jahrhundert ist der Abacus des Leonardo Fibonacci aus Pisa. Nach seiner eigenen Angabe erhielt er den ersten Unterricht in der indischen Rechenkunst zu Bugia, in Nordafrika, einer damals blühenden Handelsstadt, wo sein Vater öffentlicher Notar bei den pisanischen Kaufleuten war. Auf seinen Geschäftsreisen nach Ägypten, Syrien, Griechenland und Sicilien hatte er sich durch mündliche Besprechung und eigenes Studium alles, was sich auf das neue Zahlenrechnen bezog, anzueignen gewusst. Alle von ihm gemachten Erfahrungen und Studien über die verschiedenen Rechenmethoden der neuen Arithmetik jener Zeit finden sich in seinem Abacus (1202) in meisterhafter Abfassung vereinigt.

Die auf Leonardo Fibonacci folgenden drei Jahrhunderte können keine besonderen Fortschritte in dem indisch-arabischen Rechnen aufweisen. Trotz der vorzüglichen Darstellung der neuen Arithmetik in Fibonacci's Schrift wurde sie in seinem eigenen Vaterlande sehr wenig gepflegt, und in den fernliegenden fremden Ländern blieb sie sogar bis zum 14. Jahrhunderte im allgemeinen unbekannt.

2. Das Rechnen auf Linien.

In den ältesten, durch den Druck in Deutschland veröffentlichten arithmetischen Schriften findet man die Lehre von dem sogenannten „Rechnen auf den Linien“. So lehren diese Rechnungsweise die Rechenbüchlein aus

Hosted by Google

dem XVI. Jahrhundert von Georg Reichelstein, Johann Albrecht, Adam Riese u. a. m.; nachdem sie aber von keinem Schriftsteller als neu angeführt wird, so muss sie jedenfalls sehr alt sein und in naher Beziehung zu dem griechischen und römischen Abacus stehen. Das Rechnen auf den Linien, welches auch unter dem Namen Algorithmus linealis vorkam, reicht tief zurück bis in die ältesten Zeiten und stand in aller Herren Länder in Ausübung; es wurde sogar noch in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts von den Ungebildeten, die nicht lesen und schreiben konnten, angewendet. Das Rechnen auf den Linien wurde mit Rechenpfennigen auf einem hiezu schicklich vorbereiteten Rechenbrette oder Rechentische nach der nun erklärten Weise bewerkstelligt:

Auf dem Rechenbrette oder der Tischplatte waren entweder mit einer Farbe parallele Linie gezogen oder eingegraben, wobei die erste, d. i. die unterste Linie links mit I, die zweite nach oben mit X, die dritte mit C (100), die vierte mit einem auf der Linie stehenden Kreuzlein und mit M bezeichnet waren. Die 5., 6., 7. etc. Linien waren mit 10.000, 100.000, 1,000.000 bezeichnet. In den Zwischenräumen der Linien waren von unten gegen oben links geschrieben V, L (50), D (500) IↃↃ (5000) etc. Nach der Kenntnis der arabischen Ziffern in der Periode, als deren Gebrauch den Übergang zum Zifferrechnen nach gegenwärtiger Art anbahnte, wurden die römischen Zahlzeichen in ihrer Reihenfolge: I, V, X, L, C, D, M durch die gleichwertigen arabischen Zahlangaben ersetzt.

Was den Gebrauch des Rechenbrettes bei der Rechnungsführung betrifft, so wollen wir hierzu die Anweisung aus dem im Jahre 1534 erschienenen Rechenbüchlein von „Johann Albrecht“ wörtlich wiedergeben. Auf dem Titelblatte dieses Büchleins ist zu lesen:

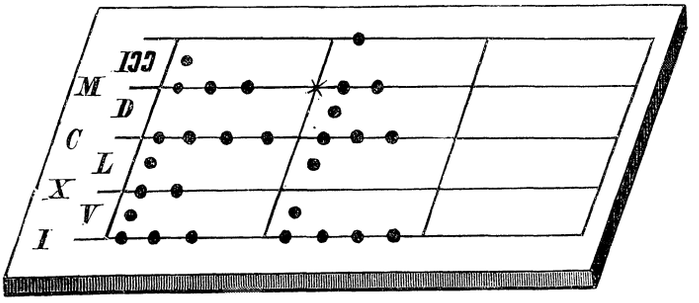
„Rechenbüchlein auff der linien | dem einfeltigen man oder leien | vnd jungen anhebenden liebhabern der Arithmetica | zu gut | durch Johann Albrecht Rechenmeister zu Wittemberg auffs fleissigst zusamen getragen. jm MDXXXIIII jar. Gedruckt zu Wittemberg durch Georgen Rhaw.“

Das genannte Büchlein gibt für die Numeration die folgende Anweisung:

„Die linien zu erkennen | ist zu merken | dass die underste linien (welche die erste genent wird) bedeut eins | die andere hinauff zehen| die dritte hundert | vnd die vierde tausent | dieselbe verzeichne mit einem kreutzlein | vnd zele auff der selben widder (als auff der ersten) an, eins auff der andern hinauff zehen | auf der dritten hundert | vnd auff der vierden tausent. Die verzeichne abermal mit einem kreutzlein. Du must aber vom ersten kreutzlein anzuheben | zu einer iglichen linien tausent sprechen. Als ein tausent | zehn tausent | hundert tausent, tausentmal tausent | vnd so viel kreutzlein vorhanden sind | so viel tausent mustu allzeit aussprechen. Du solt auch wissen | das ein iglich spatium fünffmal so viel bedeut als seine linien darunter (dazu es gehört), on das spatium unter der ersten linien, welche bedeut ein halbes, wie folgend wird anzeigt.“

Hosted by Google

Auf der nachstehenden bildlichen Darstellung des Rechenbrettes sind nach der vorhergehenden Anweisung die Zahlen 8478 und 12.859 durch die Lage der auf die Wertlinien sich beziehenden Rechenpfennige ausgedrückt:



Bei einem Rechenbrette mit 5 Linien reichten 25 Rechenpfennige aus, um alle Zahlen von 1 bis 99.999 auszudrücken. Die Zahl 99.999 wurde dargestellt mit 17 Rechenpfennigen, indem man oberhalb der fünften Linie einen Rechenpfennig, und so in die vier Zwischenräume je 1 Stück und auf jede Linie 4 Stück Rechenpfennige legte; nämlich:

Oberhalb der 5. Linie 1 Rechenpfennig, Wert							50.000
In Zwischenräumen je 1 Pf., sind 4 Rechenpfennige . .							5.555
Auf der 5. Linie 4 Rechenpfennige				à	10.000	=	40.000
„ „ 4. „ 4			„	à	1000	=	4.000
„ „ 3. „ 4			„	à	100	=	400
„ „ 2. „ 4			„	à	10	=	40
„ „ 1. „ 4			„	à	1	=	4
						Summe	99.999

Die Zahl 100.020 wurde bei sechs Linien durch drei Rechenpfennige bezeichnet, wobei ein Stück davon auf die sechste und zwei Stück auf die zweite Linie gelegt wurden. Überhaupt konnten auf einer Linie höchstens vier und in dem Zwischenraume der Linie nur ein Rechenpfennig liegen, wonach sich im ganzen für fünf Linien die vorerwähnten 25 Rechenpfennige ergeben.

Wenn man mehrfach benannte Zahlen auf den Linien darzustellen hatte, so wurden die wagrechten Linien durch senkrechte Linien in soviele Abtheilungen (Banckir genannt) getheilt, als Benennungen vorlagen. So z. B. erhielt bei Geldrechnungen das Rechenbrett durch drei senkrechte Linien vier Abtheilungen, nämlich für Gulden, Groschen, Pfennige und Heller. Sobald der Schüler eine hinreichende Fertigkeit in der Darstellung der Zahlen erlangte, begann man mit der Einübung der Species.

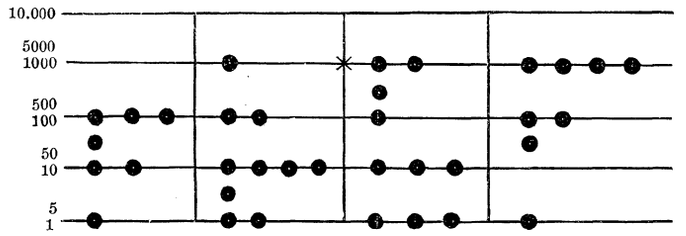
Die Addition ergab sich sehr einfach dadurch, dass man nach der vorhergehenden Anweisung die zu addierenden Zahlen auf den Linien durch das Auflegen der Rechenpfennige darstellte, wonach die Summe derart ge-

Hosted by Google

funden wurde, indem man darauf achtete, dass die auf einer und derselben Linie liegenden Rechenpfennige so geordnet wurden, dass nicht mehr als vier auf eine Linie und nicht mehr als einer in einen Linienzwischenraum zu liegen kamen. Wir finden in dem vorgenannten Rechenbüchlein für die Addition die folgende Regel angegeben:

„Wenn fünff rechenpfennige auff einer linien liegen | so heb sie auff vnd lege dafür ein jns nehiste spatium darüber. Wo aber zween rechenpfennig jnn ein spatio liegen | so heb sie auch auff | vnd lege dafür einen auff die nehiste linien darüber."

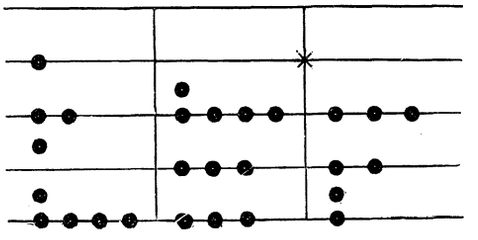
Nach dieser Regel findet man die Summe aus den Zahlen 371, 1247 und 2633 auf dem Rechenbrette dargestellt wie folgt:



In eben so einfacher Weise ergab sich die Subtraction: Man legte den Minuend und den Subtrahend auf das Rechenbrett und verminderte die Anzahl aufgelegter Rechenpfennige des ersteren um die Anzahl des letzteren. Die Regel hiezu lautet:

„Du must allweg die zal | von welcher du abziehen wilt | auff die linien legen | die andere aber so du abziehen wilt | schreib von sicherung wegen vor dich | vnd nim sie von der linien hinweg. Kanstu von wegen der hochliegenden zal das nicht thun | so resolvir odder verwechsel der öbern rechenpfennig einen | also | ligt ein Rechenpfennig auff der linien | so nim jhn auff vnd leg dafür einen jns negste spatium | unter derselben linien | und fünffe auf die linien darunter. Ligt aber ein Rechenpfennig im spatio zu verwechseln | so nim jhn auff | und lege dafür fünff Rechenpfennige auff die negste linien unter denselben spatio."

Nach diesem gestaltet sich die Subtraction der auf dem Rechenbrette aufliegenden Zahlen 1259 — 933 wie folgt:



Hosted by Google

Die Ausführung der Multiplication und Division auf dem Rechenbrette bot hingegen größere Schwierigkeiten als das einfache Verfahren der Addition und Subtraction, und es erforderte viel Übung, um mit Sicherheit geläufig das Product und dèn Quotienten bei einer gesteilten Aufgabe zu ermitteln. Die Schwierigkeit der Ausführung wuchs mit der Größe des Multiplicators und Divisors; denn je mehr Stellen eine dieser Zahlen hatte, eine desto größere Aufmerksamkeit hatte der Rechner anzuwenden, damit sich nicht ein Fehler einschleiche. Die Methode des Rechnens auf Linien für die Multiplication und Division lässt sich am besten nur durch eine mündliche Erklärung mit Hilfe des Rechenbrettes darstellen, weil man das in dem eigenthümlichen Rechnungsverfahren basierende gleichzeitige Auflegen und Wegnehmen der Rechenpfennige in der Zeichnung nicht gut versinnlichen kann. — Wir finden in „Kästners Geschichte“ über das Rechenbrett den folgenden Passus: „Ich würde die Anfänger nur auf dem Rechenbrette addiren und subtrahieren lassen. Die Multiplication und noch mehr die Division erfordern aber so vielfaches Hin- und Herlegen der Rechenpfennige, dass es schon bei Anfängern, die noch spielend lernen sollen, kein Spiel mehr bleibt; wobei das Verzählen leicht eintreten kann, abgesehen davon, dass diese beiden Rechnungsarten auf dem Rechenbrette sich mühsamer als mit Ziffern gestalten.“

In dem vorerwähnten Rechenbüchlein aus dem XVI. Jahrhunderte findet man für die mit Hilfe des Rechenbrettes auszuführende Multiplication die folgende wörtlich gegebene Regel:

„Wisse das du zwo zalen zu Multipliciren must haben. Eine | welche Multiplicirt sol werden | leg stetz auff die linien. Die ander damit du Multiplicirn wilt | schreib für dich. Wiltu nu Multiplicirn mit einer ziffer odder figur | so greiff auff die öberste linien | da einer oder etliche mehr Rechenpfennige ligen | vnd lege deine auffgeschriebene zal so manichmal, so manch Rechenpfennig auff derselben linien liegt. Wo aber ein Rechenpfennig jnn einem spatio ligt, greiff auf die negste linien vber dem selbigen spatio | vnd leg nur halb deine zal für dich geschrieben. Wenn du eine zal aber mit zween ziffern odder figurn Multiplicirn wilt | so greiff auff die andern linien vber den Rechenpfennigen, vnd leg die ander ziffer deiner aufgeschriebnen zal so manichmal | so manch Rechenpfennig auff der linien darunter ligt | darnach greiff herab auff die linien | da die Rechenpfennig ligen | vnd leg die erste ziffer deiner aufgeschribnen zal auch so mannichmal | so manch Rechenpfennig auff der linien ligt. Also thu auch mit drey | vier | fünff oder mehr ziffern | vnd also das du alweg die fünffte ziffer deiner aufgeschriebenen zal auff die fünffte linien | von der linien | da die Rechenpfennig auff ligen | an zu zelen mit auffgesetzten finger legest | die vierde auff die vierde | die dritte auff die dritte | vnd also fort herab | bis zu vntersten linien. Aber mit dem spatio thu | wie vom duplirn angezeigt. Vor allen Dingen will dir von nöten sein | das du das ein mal eins wol lernest und schleunig auswendig wissest.“

Hosted by Google

„Lern wol mit vleis das Ein mal ein |
So wird dir alle rechnung gemein.“

Wie die obige Regel besagt, wurde beim Multiplicieren zweier Zahlen auf Linien, nur die eine Zahl durch Rechenpfennige aufgelegt, die andere im Kopfe gemerkt oder nebenbei aufgeschrieben.

Das **Duplieren** geschah mit Hilfe zweier Abtheilungen (Banckire). In die erste Abtheilung wurde die gegebene Zahl aufgelegt, sodann wurden für jeden einzelnen auf einer Linie liegenden Rechenpfennig zwei Rechenpfennige auf dieselbe Linie der zweiten Abtheilung gelegt; jeden in einem Zwischenraume liegenden Rechenpfennig legte man auf die zunächst darüber stehende Linie der zweiten Abtheilung.

Für das **Medieren** (Halbieren) gebrauchte man ebenfalls zwei Abtheilungen (Banckire). In die erste Abtheilung wurde die zu halbierende Zahl durch Rechenpfennige aufgelegt, sodann geschah von der obersten Linie angefangen, die Rerechnung in folgender Weise: Auf die betreffende Linie wurde der Finger der linken Hand gesetzt, und indem man die auf ihr und in dem zunächst darüber befindlichen Zwischenraume (Spatium) liegenden Einheiten zusammenfasste (d. h. den Zahlwert dieser aufliegenden Rechenpfennige bestimmte), hob man je zwei Rechenpfennige auf und legte dafür in die zweite Abtheilung einen auf dieselbe Linie, auf welcher der Finger gehalten wurde. Für einen allein von einer Linie aufgehobenen Rechenpfennig legte man auf den nächsten Zwischenraum unter die Linie, auf welcher der Finger lag, einen Rechenpfennig in die andere Abtheilung. Die für das Medieren gegebene Regel lautete wörtlich:

„Allweg für zwen auffgehebte Rechenpfenning einen hinüber auff das ander feld | eben auff die linien auff welcher du deinen Finger hast. Also auch für einen auffgehebten Rechenpfenning allein legstu einen hinüber auff das nehist spatium vnder die linien darauf du deinen finger hast | wo man aber nichts findet | da legt man auch nichts hinüber | vnd das ist die gantz sach vom Medieren.“

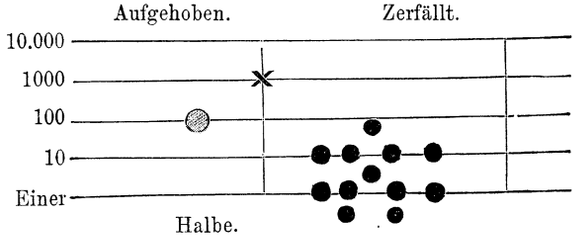
Das Numerieren, Duplieren und Medieren wurde im 16. Jahrhundert zu den Species gezählt.

Das durch die Berechnung bedingte und sich stets verändernde Auflegen, Wegnehmen und Versetzen der Rechenpfennige musste derart vorgenommen werden, dass in einem Spatium nur ein und auf der Linie höchstens vier Rechenpfennige auflagen. Ergab sich während des Rechnens durch das Auflegen auf der Linie oder im Spatium eine Anzahl Pfennige größer als die vorerwähnte, so musste sie sofort derart vermindert werden, dass man für je fünf auf der Linie liegende Rechenpfennige, welche aufgehoben (weggenommen) wurden, einen Rechenpfennig in das nächste oberhalb dieser Linie liegende Spatium legte; ebenso wurde für je zwei aus einem Spatium aufgehobenen Rechenpfennige ein Rechenpfennig auf die nächst höhere Linie gelegt. Z. B.:

Hosted by Google

Ergaben sich 5 oder über 5 Rechenpfennige auf der dritten Linie (Linie der Hunderte), so nahm man 5 Rechenpfennige von dieser Linie weg und legte dafür ein Stück auf das nächste obere Spatium (zwischen der 3. und 4. Linie); hingegen für 2 in diesem Spatium liegenden Rechenpfennige legte man nach deren Wegnahme einen Rechenpfennig auf die nächst höher liegende Linie.

Beim Rechnen auf Linien mussten oft höher liegende Rechenpfennige (höhere Einheiten) in die darunter liegenden Linien und Spatien zerfällt, d. h. in niedere verwandelt (resolviert) werden, welches Verfahren aus der folgenden bildlichen Darstellung zu ersehen ist.



(Unter der Linie der „Einer" waren „Halbe".)

Wie beim Multiplicieren wurde auch beim Dividieren nur der Dividend auf dem Rechenbrette aufgezählt, der Divisor im Kopfe behalten oder auf dem Rechenbrette bemerkt. Die Division selbst bestand der Hauptsache nach in dem wiederholten Verfahren des Abziehens. Die Regel für die Division findet sich in der nachfolgenden wörtlichen Wiedergabe:

„Greiff mit dem finger der linken handt auff die öberst linie | vnnd merck ob du deyn zal dar durch du teylen wilt nemen mögst | magstu sie nit nemmen | so greiff herab auff die ander linie | das mach so lang du die zalln dar durch du teylen willt | nemen kanst | dann heb die selbig zal auff | als offt du kanst vnnd leg alle mal ain Rechenpfening wider nyder bey dem finger | das mach als lang biss du die zal (dar durch du taylst) nit mer nemen magst | was dann bey dem finger lygen bleibt | ist das tayl deiner fürgenummenen zal".

Wenn beim Dividieren der Quotient keine ganze Zahl wurde, so pflegte man nach heutigem Brauche den Rest als Zähler und den Divisor als Nenner darunter zu schreiben.

Obgleich uns in unserem Zeitalter das übliche Zifferrechnen einfach und vortheilhaft erscheint, so fand dasselbe bei den verschiedenen Völkern Europas doch nur einen sehr langsamen Eingang, denn noch im Anfange des XVI. Jahrhunderts war das Zifferrechnen, welches man „Rechnen auf Feder" nannte, fast der alleinige Besitz der damaligen Gelehrten. Der Gewerbsmann und Kaufmann verrichtete um diese Zeit die nöthigen Berechnungen, welche sich innerhalb der vier Species bewegten, gewöhnlich „auf den Linien",

Hosted by Google

d. h. mit Hilfe des Rechenbrettes und erst nach und nach ist das Volk von dem instrumentalen Rechnen auf das Zifferrechnen (genannt auf Feder) gekommen, wozu die Klosterschulen im Laufe des XVI. Jahrhunderts das meiste beigetragen haben.

Mit Hilfe des Rechenbrettes wurden alle im damaligen Geschäftsverkehr vorkommenden Berechnungen ausgeführt. Man konnte überhaupt auf Linien alle Rechnungen ausführen, bei denen die 4 Species in Anwendung kamen, ohne dass es nöthig gewesen wäre, den Ansatz selbst darzustellen. So berechnete Huswirt die Regeldetri auf Linien in drei Feldern (Abtheilungen); in das erste kam bei Waarenberechnungen der Divisor, in das zweite der Multiplicandus und in das dritte der Multiplicator, wobei das Product der letzteren zwei Felder den Dividend bildete.

Über den Wert dieses instrumentalen Rechnens für den Unterricht sagt Riese:

> „Ich habe befunden in Unterweisung der Jugend | dass alle weg | die so auff Linien auffheben | des Rechnens fertiger vnd laufftiger werden | denn so mit den Ziffern | die feder genannt | anfahen."

Die Titelblätter der im XVI. Jahrhunderte erschienenen Rechenbücher, welche das „Rechnen auf Linien" behandeln, zeigen nicht selten Holzschnitte von rechnenden Personen. In diesen Bildern findet man die Rechenlinien entweder auf der Platte des Rechentisches eines Kaufmanns, oder auf dem Tische oder der Bank eines Wirtes dargestellt.

Hosted by Google

Achter Abschnitt.

Das Rechnen in den Klosterschulen und Privatschulen.

(Vom VIII. bis gegen Ende des XV. Jahrhunderts.)

Schon in der ersten Hälfte des V. Jahrhunderts wurde Irland von Gallien aus zum Christenthume bekehrt. Klöster erstanden dort, in welchen lateinische und griechische Schriftsteller zum Gegenstande des Studiums gemacht wurden. In Italien, in der Schweiz und in einigen Theilen Deutschlands wurden schon im VI. Jahrhunderte an den nach der Regel Benedicts von Nursia gegründeten Klöstern die sogenannten „scholae claustri" errichtet, welche Schulen lediglich den Zweck hatten, Ordens- und Weltgeistliche zu erziehen; denn nur ausnahmsweise wurde gestattet, dass nebenbei auch Laien (namentlich vom Adel) in denselben ihre Bildung, besonders im Kirchenlatein, finden konnten.

Nach Flaccus Alcuin (vornehmer Angelsachse, geboren 735), der im Jahre 766 die Leitung der Klosterschule in York übernahm, bestand der Unterricht in den Klosterschulen in Folgendem: Die Geheimnisse der heiligen Schrift wurden erläutert. Daneben wurden Grammatik, Rhetorik, Dialectik, Musik, Gesang und Poesie gelehrt. Auch die exacten Wissenschaften wurden theilweise gepflegt. Astronomie und Physik, die Zeitrechnung (Kalenderrechnung) bildeten besondere Lehrgegenstände.

Für Deutschland begann die erste Entwicklungsperiode des Schulwesens, als Karl der Große seine und des Christenthums Herrschaft in deutschen Landen ausbreitete und befestigte. Der große Frankenkönig, der die Wissenschaften schützte und pflegte und selbst noch im hohen Alter das Schreiben und die lateinische Sprache erlernte, war bestrebt, den kirchlichen Bildungsanstalten eine ganz neue, erhöhte Wirksamkeit und Bedeutung für das Leben seiner Völker zu geben. Zunächst gründete er für die Leute seines Hofes eine Bildungsanstalt (schola Palatina), an welcher er Gelehrte aus Italien anstellte. Im Jahre 781 lernte Karl der Große in

Hosted by Google

Italien den bereits früher erwähnten Alcuin kennen, den er für den Unterricht am Hofe gewann, und welcher vom Jahre 792 an das Organ aller von Karl dem Großen zur geistigen Hebung seiner Völker entworfenen Projecte war. Um die Schulen in seinem Reiche nach italienischem Muster einzurichten, berief er in den Jahren 786 und 787 Gelehrte, Sänger und Musiker, im letztgenannten Jahre auch einen Lehrer der Grammatik und einen Rechenmeister aus Italien zu sich. (Beiträge der Geschichte der Gelehrtenschulen von Gegenbauer, 1856.) Im Jahre 796 wurde Alcuin von Karl dem Großen beauftragt, die Schule in der Abtei des heiligen Martin in Tours zu einer Musterschule für alle Klosterschulen des Reiches neu zu organisieren.

Vom Jahre 801 an erließ der Kaiser zur Förderung des Schulunterrichtes eine Reihe von Gesetzen und Verordnungen, welche die Errichtung von Schulen in den einzelnen Bisthümern und Klöstern betrafen. Aber erst das Jahr 813 war für die Begründung eines wirklichen Volksschulwesens entscheidend, da in diesem Jahre das zu Mainz abgehaltene Concil anordnete: „Die Eltern müssen ihre Kinder zur Schule schicken, entweder in die Klöster oder draußen zu den Presbytern, damit sie den katholischen Glauben und das Unser Vater recht lernen und es zu Hause anderen lehren können. Wer es nicht lateinisch erlernen kann, mag es in seiner Muttersprache lernen.“ Mit diesem Ausspruche war für den Katechismusunterricht der Gebrauch der Landessprache in einzelnen Fällen gestattet. Obgleich die lateinische Sprache die allgemeine Kirchen- und Gesetzessprache für das aus so verschiedenen Völkern bestehende Reich war, so brachte Karl der Große doch die deutsche Sprache zur Geltung, welche allmählich in Urkunden und bei Rechtshandlungen in Aufnahme kam.

Von den Nachfolgern Karls im IX. Jahrhunderte wurden des Kaisers Verordnungen mehrfach erneuert, damit dessen Absicht entsprechend die Volksschulbildung eine mehr allgemeine würde. So wie es von Karl dem Großen im fränkischen Reiche versucht wurde, eine freiere und christlich-volksthümliche Cultur durch den Schulunterricht zu schaffen, so strebte in der zweiten Hälfte des IX. Jahrhunderts in England König Alfred (871—901) eine Reorganisation des gesammten Unterrichtswesens an. In Neanders Werken (II., 256) findet sich über Alfred folgender Passus: „Sein Plan für die Volksbildung gieng weiter als der von Karl dem Großen entworfene, da sich derselbe nicht bloß auf Geistliche und Mönche, sondern auf alle Stände des Volkes erstreckte. Er sorgte dafür, dass die zum Unterrichte bestimmten Schriften in das Angelsächsische übersetzt wurden und dass Schulen nicht bloß zum Unterrichte in der lateinischen Sprache, sondern auch solche errichtet werden, in denen alle in der Landessprache lesen, schreiben und rechnen erlernen können.“

Das in der karolingischen Periode gehobene Schulwesen kam im X. Jahrhunderte in einen argen Verfall, welchen die Verwirrungen und Verwüstungen, die in das sociale Leben der damaligen Zeit gekommen waren, verursachten.

Hosted by Google

Wenngleich sich einige Klosterschulen durch längere Zeit eines verdienten guten Rufes erfreuten, so dauerte die Blütezeit der Klosterschulen doch nicht lange. Die starren Einrichtungen des kirchlichen Lebens und die Ungunst der Verhältnisse des X. und XI. Jahrhunderts brachten fast überall das Klosterschulwesen in Verfall. Das Interesse an der Schulbildung nahm mit der Zeit immer mehr ab und eine crasse Unwissenheit wurde allgemein.

Im Jahre 1291 konnten im Kloster St. Gallen, welches im IX. Jahrhunderte sich eines wohlbegründeten Rufes erfreute, weder Abt noch Mönche schreiben, und im XIII. Jahrhunderte versicherte ein Benedictiner aus dem Kloster Corvey, dass es schwer sei, einen Benedictiner zu finden, der etwas von der Grammatik wisse. (Heppe's Schulwesen, pag. 25.)

Mit Hinsicht auf die Organisation der Klosterschulen und den Unterricht ist Folgendes hervorzuheben: Die Oberleitung der Klosterschule hatte der Abt, welcher den Magister scolarum bestellte. Nicht selten stand dem Magister ein Secundarius zur Seite. Die den Unterricht ertheilenden Mönche hießen Seniores, auch Scholastici.

In vielen Klöstern wurden allmählich zwei Schulen errichtet, eine scola interior und eine scola exterior. In der ersten Schule wurden die zukünftigen Ordensgeistlichen, in der zweiten Weltgeistliche und andere Laien unterrichtet.

Beide Klosterschulen umfassten gewöhnlich je eine obere und eine untere Abtheilung. In Betreff der unteren Abtheilung schrieb das Aachener Capitulare von 789 vor: „Die Lehrer sollen die Psalmen, die Noten, den Gesang, die Kalenderrechnung und die Grammatik lehren, dabei sich guter katholischer Schriften bedienen.“ In der oberen Abtheilung suchte man von dem Trivium (grammatische Studien, das ist Grammatik, Rhetorik, und Dialectik) und von dem Quadrivium (Arithmetik, Geometrie, Musik, Astronomie) so viel zu lehren, als möglich war. Aber in den wenigsten Klosterschulen konnten alle diese Wissenschaften gepflegt werden; in den meisten derselben war der Unterricht nur elementarer Art. Unter dem Trivium und Quadrivium (Viertheilung der Mathematik) dachte man sich im Mittelalter eine Encyklopädie des menschlichen Wissens (Cramers Geschichte des Unterrichtes, pag. 5—13). Von den Klosterschulen in den ersten Jahrhunderten ihres Bestandes wurde nur das Fingerrechnen nach Bedas „Computus“[1]) gelehrt, wie die bereits erwähnten Angaben Bedas in seiner Kirchengeschichte aus dem VIII. Jahrhunderte über die Zeitrechnung andeuten; doch später wurde in jenen Klosterschulen, welche das Quadrivium in den Unterricht einbezogen, das praktische Rechnen nach römischem Muster auf dem Rechenbrette (Abacus) gelehrt, was begründet erscheint durch die dem IX. Jahrhunderte angehörende Handschrift Gerberts, in welcher eine Abhandlung, überschrieben „Regula de abaco computi“ (Regel der Tafel des Rechnens) vorkommt.

[1]) Bedas Schrift „Computus“ wurde von Hrabanus Maurus in die leichtere Form des Dialogs umschrieben und nach Deutschland gebracht.

Hosted by Google

Bei dem Umstande, dass die Handschriften der Autoren selten und theuer waren, lag der Schwerpunkt des Unterrichtes im Dictieren und Memorieren. Für einzelne Pensa und behufs Memorierens gebrauchten die Schüler zum Schreiben eine mit Wachs überzogene Tafel.[1])

Neben den Klosterschulen entstanden später die Dom- und Stiftschulen, die sich in ihrer Einrichtung nicht wesentlich von den Klosterschulen unterschieden.

Die im XII. Jahrhunderte entstandenen Stadtschulen, welche im Mittelalter die einzigen Verbreiter der Volksbildung waren, haben zwar den Interessen des bürgerlichen Lebens mehr als die Kloster- und Stiftschulen entsprochen, doch außer einer größeren Thätigkeit der Abacisten haben sie keine nennenswerten Fortschritte bis zum Ende des XV. Jahrhunderts aufzuweisen; doch die ersten Buchdruckversuche von A-B-C-Büchern durch Guttenberg im Jahre 1450 machten den Anfang für die Hebung und Verbreitung der allgemeinen Volksbildung, die besonders im XVI. Jahrhunderte große Fortschritte machte, als die Buchdruckerkunst in ihrer technischen Vollendung gereift und bald darauf über alle Theile Europas verbreitet war.

In Wien dürften schon zur Zeit der römischen Colonisation Schulen bestanden haben, wenngleich keine historischen Denkmäler Spuren römischer Cultur der Nachwelt überlieferten. Auch über die Ergebnisse des Reichsgesetzes Karls des Großen vom Jahre 789, betreffend die Errichtung von Schulen an allen Klöstern und Kathedralkircken, lassen sich Details, basierend auf schriftliche Daten, nicht anführen. Erst aus der Zeit der Babenberger kommen verlässlichere Nachrichten über das Bestehen von niederen Schulen, welche damals fast mit jedem bedeutenden Kloster verbunden waren, wo die Söhne der Fürsten und des Adels, sowie der Freien unterrichtet wurden. Die ältesten documentarischen Nachrichten über Schulen in Wien sind in Kaiser Friedrichs II. Freiheitsbriefe für Wien vom April 1237 enthalten, in welcher Urkunde zuerst der Bürgerschule zu St. Stephan gedacht wird. In einem Documente des Wiener Bürgermeisters, Hanns Haringseer, in welchem nach Beschluss des Rathes der Stadt Wien vom Jahre 1446 „die Ordnung der Schule zu St. Stephan“ festgestellt wurde, wird nur von vier in Wien bestehenden Schulen gesprochen. In dieser Urkunde ist zu lesen: „... das nur vir schul in der stat seyn sullen, aine zu sand Stephan, die ander zu sand Michel, die drit in unserm spital und die vierd zu den Schotten.“ In dem Universitätsstiftbriefe Herzog Albrechts III. vom

[1]) Das etwa 300 Jahre v. Chr. erfundene Pergament war für Schulzwecke zu kostspielig; deshalb wurden von den Schülern bei ihren Übungen im Schreiben und Rechnen Holztafeln gebraucht, die mit einer Staubbüchse jedesmal neu bestaubt wurden, sobald auf denselben kein Raum mehr vorhanden war. Die mit flüssigem Wachs überzogenen dünnen Holzblätter, auf welchen mit einem Eisengriffel geschrieben wurde, benützten die Schüler nur für die zum Memorieren bestimmten Aufschreibungen. Nach dem Muster italienischer Papierfabriken, die bereits im XIII. Jahrhunderte Leinenlumpen-Papier erzeugten, entstand im Jahre 1390 die erste Papiermühle in Deutschland in der Nähe von Nürnberg.

Hosted by Google

Jahre 1384 wird die Schule zu St. Stephan (welche dazumal schon eine niedere Gelehrtenschule war) mit der Universität in theilweise Verbindung gesetzt. Im XVI. Jahrhunderte kam zu der St. Stephans-Schule als zweite Vorbereitungsschule für die Universität die im Jahre 1567 vom Kaiser Maximilian II. in Wien errichtete adelige Landesschule, welche aus vier Classen bestand. Die Unterrichtsgegenstände waren: Katechismus, lateinische Grammatik, Deutsch, Arithmetik, Griechisch, Lesen röm. Autoren, Musik und Gesang. Nach dem Lehrplane waren in den drei letzten Classen von 12 bis 1 Uhr abwechselnd Musik und Arithmetik vorgeschrieben.

Über die erste „Bürgerschule zu St. Stephan in Wien" berichtet ausführlich Dr. Anton Mayer in den „Blättern des Vereines für Landeskunde von Niederösterreich", XIV. Jahrg. Nr. 10, 11 und 12, Wien 1880.

London hatte im Jahre 1154 die erste Stadtschule. Die erste Stadtschule in Paris, aus welcher im Jahre 1206 die Universität hervorgieng, bestand bereits im Jahre 877.

Da die lateinische Pädagogik des Mittelalters die Rechenkunst und das Schreiben nicht in dem Maße zu pflegen vermochte, als es die Bedürfnisse des höheren Bürger- und Handelsstandes erheischten, so entstanden in größeren Handelsstädten die ersten Rechen- und Schreibschulen, welche, obgleich rein bürgerliche Institute, doch in ihrer Einrichtung und in ihrem ganzen Bestande von dem Scholasticus des Domcapitels abhängig waren. In Deutschland scheinen diese Schulen am frühesten zu Lübeck entstanden zu sein; denn schon im Anfange des XIV. Jahrhunderts bestanden hier vier Rechen- und Schreibschulen. In Hamburg trat das Verlangen nach Errichtung von solchen Schulen erst seit dem Jahre 1400 hervor. Nachdem aber der Bürgerschaft die Bewilligung zur Errichtung dieser Institute vom Domcapitel verweigert wurde, so suchte man sich mit heimlichen Schulen in Privathäusern zu helfen. Als jedoch der Scholasticus Friedrich Deys davon Kenntnis erhielt, verklagte er die Bürgerschaft von Hamburg in Rom und erwirkte von Bonifacius VIII. eine Bulle (vom 13. Mai 1402), worin unter Androhung des Bannes die sofortige Schließung aller geheimen Schulen befohlen wurde (Heppe, Schulwesen des Mittelalters, pag. 39). Da jedoch die ganze Bürgerschaft von der Nothwendigkeit dieser Schreib- und Rechenschulen überzeugt war, so hatten die Rathsherren von Hamburg diese Schulen nicht geschlossen, weshalb die Publication der päbstlichen Bulle erfolgte und einen Streit veranlasste, der erst nach Jahrzehnten mit einem Vergleiche endete, in welchem es dem Bürgerrathe gestattet wurde, diese Art Schulen mit der Bedingung zu errichten, dass in denselben außer dem Lesen des Deutschen, dem Anfertigen deutscher Briefe und dem Rechnen kein Gegenstand in deutscher Sprache gelehrt werden dürfe. Diese Schulen, welche besonders für die Kaufmannschaft bei dem sich vergrößernden Handel zum Bedürfnisse wurden, sind bereits im Jahre 1432 auf vier angewachsen.

Nachdem Albrecht Dürer (geb. 1471 in Nürnberg, gest. 1528) in seinen zur Förderung der Künste praktisch abgefassten Schriften mit Nach-

Hosted by Google

druck darauf hingewiesen hatte, dass für Künstler und Handwerker eine auf der Kenntnis der Geometrie und der Rechenkunst beruhende Vorbildung unumgänglich nothwendig sei, haben die Behörden von Nürnberg in wohlverstandenem Interesse der Bürgerschaft angeordnet, dass von öffentlich angestellten Lehrern Vorträge über die Elemente der Geometrie und über die Rechenkunst in deutscher Sprache für Handwerker und für alle, die keine gelehrte Bildung besitzen, gehalten werden. Dies gab Veranlassung zur Errichtung der ersten Gewerbeschule Deutschlands. Bereits mehrere Decennien früher wurden in Nürnberg nach dem Vorbilde der Florentiner kaufmännische Rechenschulen errichtet, die sich des besten Rufes erfreuten und für ganz Deutschland mustergiltig waren. Der lebhafte Handel Nürnbergs, der sich bis in die fernsten Gegenden erstreckte, verbreitete die dort üblichen, der kaufmännischen Praxis angepassten Rechenmethoden über ganz Deutschland und weit darüber hinaus.

Da Wien bereits im XII. Jahrhunderte unter den Babenbergern eine blühende Handelsstadt war, und nachdem in späteren Jahrhunderten Wiener Kaufleute durch den Besuch italienischer Messplätze die in Italien vorgeschrittene Rechenkunst kennen lernten, so lässt sich daraus fast mit Gewissheit folgern, dass auch in Wien eigene Rechenschulen nach italienischem Muster bestanden haben, obgleich ich bisher geschichtliche Belege hiefür nicht auffinden konnte.

Hosted by Google

Neunter Abschnitt.

Das Rechnen in Deutschland seit Gründung der Wiener Universität bis Ende des XVI. Jahrhunderts.

Da die Klosterschulen des Mittelalters nur für die Bedürfnisse der Kirche eingerichtet waren, und ihre Lehrer als Träger und Verkünder der christlichen Lehre alles andere Wissen den Dogmen himmlischer Dinge unterordneten, so konnten in diesen Schulen die von den Römern ererbten exacten Wissenschaften keine zeitgemäße Pflege und Erweiterung finden. Das Rechnen, welches in den Anfängen der Klosterschulen sich nur auf das Fingerrechnen beschränkte, wurde im Verlaufe der Jahrhunderte auf den Algorithmus linealis (Rechnen auf Linien mit Rechenpfennigen) ausgedehnt, und erst im Laufe des XVI. Jahrhunderts verschaffte sich das Zifferrechnen den Eingang in die Klosterschulen, nachdem dasselbe bereits im XV. Jahrhunderte in den kaufmännischen Rechenschulen nach italienischen Rechenmethoden geübt wurde.

Mit der allgemeinen Verbreitung der indisch-arabischen Positionsarithmetik in Deutschland steht im innigen Zusammenhange die im Jahre 1365 in Wien errichtete Universität, welche nach dem Vorbilde der Pariser Hochschule eingerichtet wurde. Da hauptsächlich bei den astronomischen Vorlesungen die Kenntnis des Rechnens nicht entbehrt werden konnte, so wurden in den Unterricht für Mathematik die Grundrechnungsarten in ganzen Zahlen und das Wurzelausziehen einbezogen, wozu später noch die Regeldetri kam. Die den mathematischen Studien zugrunde gelegten Schriften waren in der ersten Zeit des Bestehens der Wiener Hochschule jedenfalls dieselben, die an der Pariser Universität in Verwendung standen, nämlich: außer Euklid besonders die Schriften des Johann Halifax de Sacro Bosco (gest. 1256 in Paris). Dieser schrieb einen Algorithmus [1]) (auch Algorismus genannt) in Versen,

[1]) Mohammed ben Musa, dessen arithmetische Schrift bereits auf S. 61 erwähnt wurde, war in Kharizm geboren und wurde deshalb von seinen Landsleuten „Alkharezmi“ genannt. In den lateinischen Übersetzungen erfuhr letzterer Name verschiedene Umformung; die gebräuchlichste war „Alchoarismus“, woraus sich später Algorithmus und Algorismus als stabil bleibend bildeten. Unter dem Namen Algorithmus verstand man später die Rechenmethode, welche Mohammed ben Musa Alkharezmi gelehrt hatte; kurz: unter Algorithmus verstand man die indisch-arabische Rechenkunst (Positionsarithmetik). Mit Beginn des 12. Jahrhunderts traten die Algorithmiker in Europa auf. Im Anfange des XIII. Jahrhunderts erlernte Sacro Bosco die indisch-arabische Rechenkunst.

Hosted by Google

und einen zweiten in Prosa. Beide enthalten die folgenden Rechnungsoperationen: Numeratio, Additio, Subtractio, Mediatio, Duplatio, Multiplicatio, Divisio, Radicum extractio in quadratis et cubicis. Nebst diesen zwei genannten Schriften wurde beim Unterrichte in der Mathematik auch ein Auszug aus der Arithmetik des Boetius von Johann de Muris (Johann von Meurs um 1300) gebraucht.

Über ein halbes Jahrhundert blieb das sehr bescheidene arithmetische Wissen der Studierenden der Wiener Hochschule in den engen Grenzen des Algorithmus des Sacro Bosco eingeschlossen, bis in der Mitte des XV. Jahrhunderts **Johann von Gmunden** [1]) ein lebhaftes Interesse für das Studium der Astronomie erweckte. Da ihm bei seinen astronomischen Vorlesungen der Algorithmus des Sacro Bosco, dessen Inhalt sich nur auf die Rechnung mit ganzen Zahlen erstreckte, nicht genügte, verfasste er zu demselben eine Ergänzung in seiner Schrift über die Bruchrechnung, genannt Sexagesimalrechnung (Brüche, deren Nenner 60 waren). Wie bekannt, war das Sexagesimalsystem seit den ältesten Zeiten in der Astronomie üblich. Gewissermaßen vertraten die Sexagesimalbrüche schon beim Ptolemäus die Stelle unserer Decimalbrüche, besonders bei der Quadratwurzelausziehung aus Zahlen, die keine Quadratzahlen sind. Johann von Gmunden lehrte in seiner Schrift das Rechnen mit den Sexagesimalbrüchen in der Addition, Subtraction, beim Medieren (Halbieren) und Duplieren, in der Multiplication, Division; beim Quadrat- und Cubikwurzelausziehen. Die erwähnte Schrift, wie noch dessen andere astronomische Schriften, dienten lange Zeit als Grundlage für das astronomische Studium an der Wiener Hochschule.

Ein würdiger Nachfolger des Johann von Gmunden war **Georg von Peuerbach,** [2]) welcher den veralteten Algorismus des Sacro Bosco für die Universität als unzureichend fand und deshalb ein besseres Compendium für den mathematischen Unterricht zu schreiben sich vornahm. Auf seinen Reisen, die er vor Beginn seiner Vorlesungen an der Wiener Universität in Italien (wahrscheinlich in den Jahren 1450—1453) machte, hatte er die

[1]) Johann von Gmunden (geb. 1380, gest. 1442 in Wien) führte seinen Beinamen nach seinem Geburtsorte „Gmunden" am Traunsee (Gmundner-See) in Oberösterreich. Nach Vollendung seiner Studien auf der Wiener Universität hielt er an derselben mathematische und astronomische Vorlesungen,

[2]) Georg von Peuerbach (geb. 1423 in Peuerbach unweit Linz, gest. 1461 in Wien), nahm, nachdem er seine Studien auf der Wiener Universität vollendet, an verschiedenen Universitäten in Deutschland, Frankreich und Italien einen längeren Aufenthalt; an der Universität in Ferrara, wo damals der berühmte Astronom Johannes Blanchinus von Bologna lehrte, hielt er astronomische Vorträge. Im Jahre 1454 kehrte Georg von Peuerbach nach Wien zurück. Neben den Vorträgen an der Wiener Hochschule nahm die Bearbeitung des Ptolemäischen Almagests, worin das gesammte astronomische Wissen des Alterthums vereinigt war, und welche Schrift als Grundlage für die Astronomie des XV. Jahrhunderts diente — seine ganze Thätigkeit in Anspruch, als der Tod ihn im 38. Jahre dahinraffte. (Nach Aschbach, S. 479.)

Hosted by Google

bessere Behandlung der Arithmetik kennen gelernt; er verfasste auf Grund der gemachten Erfahrungen für die ersten Elemente des Rechnens einen Leitfaden, der als Grundlage für die Vorlesungen an der Wiener Universität zum Gebrauche vorgeschrieben war. Dieser Leitfaden des berühmten Verfassers wurde auch an anderen Universitäten, wie Prag, Leipzig und Wittenberg, als Grundlage für die Vorlesungen benützt und später durch Beispiele und Zusätze erweitert. In der ursprünglichen Verfassung enthält der Algorithmus Peuerbachs (Introductorium in Arithmeticam) die folgenden arithmetischen Operationen: Numeratio, Additio, Subtractio, Mediatio, Duplatio, Multiplicatio, Divisio, Progressio und Ausziehung der Quadratwurzel. Die sechs ersten Operationen werden ähnlich wie gegenwärtig ausgeführt, die Division und die Quadratwurzelausziehung nach arabischem Muster. Die kleine Schrift enthält nur Regeln ohne Begründungen; das auf die Geschäftspraxis angewandte Rechnen ist ganz ausgeschlossen. Als Prüfungsmittel für die Richtigkeit des Resultates wird die Neunerprobe empfohlen.

Die erwähnte arithmetische Schrift von Peuerbach wurde durch den Druck erst im Jahre 1503 veröffentlicht; also im 42. Jahre nach dem Ableben Peuerbachs. Dieses später wiederholt vervielfältigte Büchlein besteht aus sieben enggedruckten Quartblättern.

Peuerbach und sein als Mathematiker und Astronom berühmt gewordener Schüler Johannes Müller, genannt **Regiomontanus** (1436—1476), welche zuerst in Deutschland das Zifferrechnen in ausgedehnterem Maße gebrauchten, haben durch ihre Schriften viele für das neue Rechnen gewonnen.

Grammateus[1]) sagt in seiner Schrift, dass Peuerbach seinen Algorithmus für „die jungen studenten der hoen schul zu Wienn“ geschrieben habe.

Seit dem Tode Peuerbachs bis Ende des XV. Jahrhunderts wurde an der Wiener Hochschule kein nennenswerter Fortschritt in der Arithmetik bemerkbar. Als jedoch im Anfang des XVI. Jahrhunderts der Kampf zwischen dem „Rechnen auf den Linien“ und zwischen dem „Rechnen auf der Feder“ begonnen hatte, hielt die Wiener Universität, der alte Glanzpunkt mathematischer Bildung Deutschlands, eine geraume Zeit fest an dem Althergebrachten, indem sie von den einmal vorgeschriebenen Compendien, nach welchen die Vorträge gehalten wurden, nicht abweichen wollte, was zur Folge hatte, dass Privat-Vorlesungen entstanden, in welchen die Arithmetik mit Berücksichtigung des praktischen Lebens nach neuen Formen gelehrt wurde. Bezeichnend für die damaligen Zustände ist eine Stelle in Balthasars und Lichts Rechen-

[1]) Heinrich Grammateus (Schreyber) von Erfurt, Mathematiker der Wiener Hochschule im Anfange des XVI. Jahrhunderts. Von ihm sind mehrere mathematische Schriften in lateinischer und deutscher Sprache im Drucke erschienen. Auf seinem deutschen Rechenbuche vom Jahre 1518, welches in Wien gedruckt wurde, ist am Schlusse des langen Titels zu lesen: „Gemacht auff der löblichen hoen schul | zu Wienn in Österreich durch Henricū Grammateum, oder schreyber von Erffurdt der siebē | freyen künsten Maister“.

Hosted by Google

buche, welches im Jahre 1509 in Leipzig erschienen ist. Der Verfasser sagt nämlich unter anderem in der Vorrede, dass gewisse Übungen im kaufmännischen Rechnen auf den Universitäten eingeführt werden sollen, wie sie die Rechenschulen Nürnbergs bereits seit Jahren betreiben.

Nachdem der Streit zwischen der alten und neuen Rechenweise durch das allmähliche Unterliegen der ersteren siegreich zugunsten der letzteren entschieden wurde, lenkten die Universitäten in neue Bahnen ein und gaben der Arithmetik verbesserte Formen mit praktischer Richtung und Erweiterung, wie es die damaligen Bedürfnisse des praktischen Lebens bedingten. Begünstigt durch die schon weit verbreitete Buchdruckerkunst, entstanden darauf in Fülle Lehrbücher der neuen Rechenkunst, an deren Verfassung sich in regem Wetteifer sowohl Mathematiker als Nichtmathematiker betheiligten.

An dieses anknüpfend dürfte hier die passendste Stelle sein, aus der großen Zahl der Rechenbücher, die im Anfange des XVI. Jahrhunderts in Deutschland erschienen sind, einige der hervorragendsten zu besprechen:

1. In Müllers Repertorium d. math. Lit., I. Bd., S. 191, wird das Rechenbuch von Johann Widmann aus Eger, welches im Jahre 1489 in Leipzig gedruckt wurde, als das älteste deutsche Rechenbuch angegeben.[1]) Dieses Rechenbuch erhielt in der ersten Ausgabe den folgenden Titel: „Behende vnd hübsche Rechnung auff allen kaufmannschaft von Johannes Widman aus Eger. Gedruckt in der fürstlichen Stath Leipczick durch Konrad Kachelofen. Im MCCCCLXXXIX Jare.“

Nachdem der Verfasser seine Studien auf der Leipziger Universität beendet, lehrte er in den letzten Jahrzehnten an derselben die Mathematik. Er verfasste sein Rechenbuch nach arabischen Mustern, wahrscheinlich nach handschriftlich vorhandenen Compendien, die auf indisch-arabischen Quellen beruhten. Bei Gelegenheit der Einmaleins-Tafel deutet er auf eine orientalische Stelle; überdies gibt er an benützt zu haben: Joh. de Sacrobosco, Euklid, Boetius und Jordanus.

Widmans Rechenbuch, welches die dem praktischen Leben angepassten Rechnungsformen behandelt, zerfällt in drei Theile. Der erste Theil behandelt „vō kunst vn art der zal an yr selbst“ (d. h. Rechnen mit absoluten Zahlen); der zweite: „vō der ordnūng der zal“ (d. h. Verhältnisse und Proportionen und deren praktische Anwendung); der dritte: „vō der art des messen | genāt geometria“. Der Verfasser beginnt in seinem Buche mit den sieben Grundrechnungsarten (zu welchen auch die Numeration, das Duplieren

[1]) In C. J. Gerhardts Geschichte der Mathematik, S. 39, finde ich als das älteste, durch den Druck schon im Jahre 1473 veröffentlichte deutsche Rechenbuch, das von Heinrich Petzensteiner angegeben. Dieses 77 Blätter umfassende Rechenbüchlein soll außer den Grundrechnungsarten und der Regeldetri auch Gesellschafts-, Stich- (Tausch von Waren), Gold- und Silberrechnung enthalten. — Wahrscheinlich besteht der Inhalt nur aus Regeln und Beispielen.

Hosted by Google

und Medieren gezählt wurden), dann folgt das Progredieren und Wurzelausziehen. Die Subtraction, Multiplication und Division ist ganz identisch mit der indischen Rechnungsweise (siehe III. Indische Rechenkunst nach Brahmagupta und Bhascara); auch beim Wurzelausziehen kommt die indische Quelle zum Vorschein. Die Regeln findet man nirgends erwiesen; die Richtigkeit der Rechnungsbeispiele bei den Species erprobt Widman durch die Neunerprobe und durch die Zahl 7 (Siebnerprobe). Auf die nach indisch-arabischer Weise abgehandelte Bruchrechnung folgt die sogenannte Tolletrechnung (Multiplication und Division in benannten Zahlen mittelst Zerfällung); eine Reihe von Beispielen in Brüchen beschließt dieses Capitel. In dem nächstfolgenden Capitel folgen Verhältnisse und Proportionen nach Mustern von Euklid, Boetius und Jordanus. Dieser Abschnitt enthält die Vorbereitung für den „aller fürnemlichest teil des andern teils", d. i. zu den Aufgaben der „guldin regel" (Regeldetri), aus welcher nach den verschiedenartigen Rechnungsbeispielen Regeln gefolgert werden für die Behandlung der geraden und verkehrten Regeldetri, der Mischungsrechnung, Gesellschaftsrechnung, der Stichrechnung (Warentauschrechnung), Münzrechnung (mit Benützung des Kettensatzes nach indischer Rechnungsweise. Vgl. Abs. III.), zuletzt folgt regula falsi, wie Widman sagt: „... ein regel durch welche man aller regel frag (hyndan gesetz regulam cosse [1]) machen mag."

Nach der Mittheilung Gerhardts hat die k. Bibliothek in Berlin Ausgaben von Widmans Werken auch aus den Jahren 1508 und 1519.

---

[1]) Ziffergleichungen des ersten und zweiten Grades nannten arabische Mathematiker: „Al gebr wal mokâbala" (d. h. die Ergänzung und Vergleichung), woraus der Ausdruck „Algebra" hergeleitet wird. Die Italiener nannten die unbekannte Größe in einer Gleichung cosa (d. h. Ding), die Lehre von Ziffergleichungen „Regola della cosa", woraus mit Beginn des XVI. Jahrhunderts die deutschen Algebraisten „Regel Coss" oder die kürzere Ausdrucksweise „Coss" bildeten. Obgleich sich bereits im Alterthume die Griechen mit der Lösung algebraischer Probleme beschäftigten (Diophantus schrieb darüber ein besonderes Werk), so haben die abendländischen Christen die Lösung der Gleichungen doch erst durch die Araber kennen gelernt, namentlich durch die Schrift aus dem IX. Jahrhunderte des Mohammed ben Musa. Großes Verdienst um Verbreitung algebraischer Studien erwarb sich der italienische Kaufmann Leonardo Bonaccio aus Pisa, der circa um 1200—1205 den Orient bereiste und sich dort Kenntnisse in der arabischen Arithmetik und Algebra sammelte. Das erste Werk über Algebra, welches im J. 1494 in Venedig gedruckt wurde, hat den Minoritenmönch Lucas Pacciolus (Luca Borgo) zum Verfasser. Dieses Werk mag zur Verbreitung der Algebra in Deutschland den ersten Impuls gegeben haben. Bis zu den ersten zwei Decennien des XVI. Jahrhunderts war die „Regel Coss" eine geheim gehaltene Wissenschaft in Deutschland. Einige herumziehende Mönche, die sich mit der Lösung von Wortgleichungen beschäftigten, haben aus ihrer Kunst ein Geschäft gemacht, indem sie einzelne Aufgaben gegen Bezahlung verkauften und zu lösen lehrten. So bemerkt Adam Ryse in seinem später vorgefundenen Manuscripte über die „Coss" (im Druck erschienen unter dem Titel: Berlet, Coss von Adam Ryse. Annaberg 1860) bei Lösung eines Beispieles aus den Wortgleichungen Folgendes: „Von diesem exempel hat mein Freund Hans Conrad gebenn eynem schwartzen munich prediger ordens, welcher „Aquinas" genannt wartt 1 Gulden, von

Hosted by Google

Da die Elemente der Geometrie, welche Widman im dritten Theile seines Werkes[1]) behandelt, außerhalb des Rahmens der mir gestellten Aufgabe liegen, so erwähne ich vorübergehend von der Inhaltsberechnung aus derselben nur Folgendes: Widman wendet größtentheils zur Inhaltsbestimmung ebener Figuren die Quellen römischer Feldmesser an, aus welchen auch einige falsche Regeln zur Bestimmung des Flächeninhaltes flossen, so z. B.:

Ist a die Seite eines gleichseitigen Dreieckes, so ist dessen Inhalt $= \frac{a^2}{2}$. — Der Inhalt von einem aus zwei gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzten Rhombus ist gleich dem Quadrate einer Seite. — Für den Kreisinhalt gibt Widman vier Regeln an; zwei davon lauten: ‚Multiplicir diametrum circuli in sich selb vnd vō dem product subtrahir $\frac{11}{14}$ (soll heißen $\frac{11}{14}$ vom Quadrate des Diameters) vñ waz da bleib dz ist area superficialis circuli vñ ist recht. Oder thu ym also: multiplicir die circumferentz in sich selb vnd so du das product teilst in $12\frac{4}{7}$ | so kūt es gleich als obē. Oder machs also: multiplicir dz halb teyl der circūferentz in den halben diametrum vnd kūt auch recht.“

2. **Heinr. Grammateus**, Rechenbuch erschien 1518 in Wien unter dem Titel: „Ayn new künstlich Buch welches gar gewiß vnd behend | lernet nach gemainen regel Detre | welschen practic | regeln falsi vnd etlichen regeln Cosse mancherley schöne vnd zuwissen notürfftig rechnung | auff kauffmannschaft. Auch nach den proportion der kunst des gesangs jm diatonischen geschlecht auß zutaylē monochordū | orgelpfeyffē | vnd ander jnstrument auß der erfindung Pythagora etc.“ Er beginnt in dieser Schrift, in welcher auch die kaufmännische Buchhaltung und Fragmente der Geometrie zu finden sind, mit den Grundoperationen in nachstehender Reihenfolge: Numeratio, Additio, Multiplicatio, Subtractio, Divisio; hiebei nimmt er nicht mehr, wie es sonst üblich war, die Mediatio und Duplatio in die Reihe der Grundrechnungsarten auf, sondern erklärt, dass Duplatio und Mediatio nichts anderes als Multiplication und Division durch 2 ist. Als Grund, warum er die Multi-

---

dem auch „Andreas Alexander“ (damaliger Professor an der Leipziger Universität) der erfarnste Mathematicus geleret“. Nachdem Grammateus in seinem Rechenbuche an Beispielen gezeigt hatte, wie die im Manuscripte des Mohammed ben Musa vorkommenden sechs Gleichungsformen zu lösen sind, hat sein Schüler Chr. Rudolff aus Jauer das erste deutsche Lehrbuch über Gleichungen (Coßrechnung oder Algebra) geschrieben (1525).

[1]) Aus den mit keiner mathematischen Schärfe im III. Theile gegebenen Definitionen hebe ich heraus: „Punctus ist ein klein ding das nit zu teilen ist.“ — „Angulus ist gemacht vō zwo lini.“ — „Ein figur oder superficies mit einer linie umgebē welche lini so sy zu sammē kūt circūferentia genāt ist | vū der selbē figur mittel ein punctus ist | vō welchē lini aussgestreckt biss an dy circūferētz gleich sein.“

Hosted by Google

plication unmittelbar nach der Addition folgen lässt, sagt er, dass „in dieser operation werden funden alle aigenschafften der Additio“. Die Multiplication mehrziffriger Zahlen lehrt er nach gegenwärtig üblicher Art, die Division nach indischer Rechnungsweise. So wie Peuerbach, gebraucht auch Grammateus bei den Grundrechnungsarten die Neunerprobe. Die Regeldetrie in ganzen Zahlen wendet er auf praktische Rechnungsfälle an, und lehrt in Beispielen die wälsche Praktik in ähnlicher Weise wie der italienische Mathematiker Tartaglia; die Bruchrechnung und die Regula falsi beschließen den arithmetischen Theil, aus welchem als besonders bemerkenswert hervorgehoben wird, dass bei den Proportionen sich die Anfänge von allgemeiner Zahlbezeichnung (der Buchstabenrechnung) vorfinden, so z. B.: „Wie sich hadt *a* zum *b* also hat sich *c* zum *d*.“ Sowohl Inhalt als die Behandlung des Lehrstoffes haben eine dem praktischen Leben möglichst angepasste Richtung; das Buch hat an Rechnungsregeln keinen Mangel, doch ein Beweis ihrer Richtigkeit ist nirgends zu finden.

3. Das von **Chr. Rudolff von Jauer** verfasste Rechenbuch vom Jahre 1540 führt den Titel:

„Künstliche rechnung mit der ziffer vnd mit den pfenningē sampt der Wellischen Practica | vnd allerley forteyl auff die Regel de Tri. Item vergleichung mancherley Land vnd Stet | gewicht | Ellnmas | Müntz etc. Alles durch Chr. Rudolff zu Wienn verfertiget. Getruckt zu Nürmberg bei Johañ Petreo, Anno M. D. X. L.

Das Buch ist in zwei Theile getheilt. Den ersten Theil nennt der Verfasser das „Grundbüchlein“, welches die Species in ganzen und in gebrochenen Zahlen lehrt; dem zweiten Theile gibt er den Namen „Regelbüchlein“. Zum letzteren bemerkte er: „Das Regelbüchlein zeigt die guldene Regel de Tri | wie dieselbig vorteilig zu brauchen | mit nachvolgung vil schöner exempel | durch besondere titel ordentlich von einander gesundert | aus welchē ein yeder nit allein all notturfftige kauffmans rechnung | sondern auch was zu schickung des tegels vnd zu Müntz gehörig | leichtlich erlernen mag.“

Rudolff beginnt mit der Numeration und den vier Species, die er in der damals üblichen Weise lehrt; bei der Division durch 10, 100, 1000 u. s. w. gibt jedoch Rudolff an, dass soviele Ziffern gegen links zählend durch einen Beistrich abzuschneiden sind, als der Divisor Nullen hat, welches Verfahren die erste Bezeichnung der Decimalbrüche in sich schließt. Die Richtigkeit der Rechnung bei jeder Species prüft er durch die Neunerprobe, doch bemerkt er hinzu, dass durch jede andere Ziffer die Probe gemacht werden könne, und sagt weiter: „die gewissest prob so man gehaben mag | ist wañ ein species die ander probirt.“ Nun folgen die Species in benannten Zahlen und die Lehre von Brüchen in besonders ausführlicher Weise. Nachdem Rudolff das Zifferrechnen an den Grundrechnungsarten in ganzen und gebrochenen Zahlen in seiner Schrift abgehandelt hat, fügt

Hosted by Google

er diesem das sogenannte Rechnen „auff den linien“ an, über welches er am Schlusse des ersten Theiles Folgendes sagt: „Das die vier species | auff den linien durch viel ringere ybung als auff der Ziffer | gelernt werde | mag ein yeder aus obenanzeigter vnterweisung bey jene selbst ermessen. Derhalbē dise art d' pfennig fürtrefflich were | wo sie an ihr selbst vollkommen frembden außwendigē zusprung der ziffer nit begerte. Wahrlich was Fürsten vnd Herrn Rentkamer | vrbarbücher | register | außgab | empfang | vnd ander gemeine haußrechnung belangt | dahin ist sie am bequemisten | zu subtilen rechnungen zum dickermal seumlich. Dañ wiewol alle rechnung die vier species | als durch einen werkzeug gemachet werden | so muß man doch alles des jhenig so von brüchen geschrieben, sampt den so künstlich bei der Regel de Tri zusagen | auch bei den linien, gleichen und volligklichen verstand haben.“

Rudolff meint also wie alle seine Zeitgenossen, dass die Rechnung „auf Linien“ leichter und für gewöhnliche Hausrechnungen bequemer als das Zifferrechnen ist, und zwar hauptsächlich deshalb, weil bei ersterer Rechnungsweise das Zahlenauswendiglernen nicht begehrt wird; doch bei subtilen (verfeinerten) Rechnungen, sagt er weiter, führt sie langsamer (seumlich) als das Zifferrechnen zum Ziele. — Auffallend erscheint es, dass der Verfasser die von ihm als leichter gehaltene Rechnungsweise nach der schwierigen folgen ließ.

Im zweiten Theile schickt Rudolff der Regeldetri einige Sätze über Verhältnisse und Proportionen voraus; von der Regeldetri sagt er: „sie beschleußt in sich die aller nützlichste Regel, dadurch unzeliche rechnung in kauffen und verkauffen außgericht werde.“ Darauf lässt er die wälsche Praktik folgen, welche er, wie folgt, definiert: „Dieweil die Wellisch rechnung nichts anderes ist, dañ ein geschwinder außzug in die Regel de Tri gegründet, wirt sie auch derhalben practica gesprochē.“ Sowohl die Regeldetri, als die wälsche Praktik erläutert Rudolff an vielen Beispielen. Auf dieses folgt das „Exempelbüchlein“, welches eine reiche Anzahl Aufgaben mit beigesetzten Resultaten enthält; bei schwierigeren Aufgaben findet man einige Andeutungen für die Berechnung beigegeben. Unter andern findet man hier Aufgaben über den Kettensatz, ferner über die umgekehrte Regel de Tri, über Regula quinque, Gesellschaftsrechnung, Stichrechnung (beim Warentausch), Bergwerksrechnung, Silber- und Goldrechnung, Alligationsrechnung (schickung des tegels), Münzschlag etc. Tafeln über Vergleichung von „Maß, Gewicht und Müntz“ beschließen dieses Rechenbuch, welches wegen seiner praktischen Anlage und methodischen Behandlung des Gegenstandes das beste in damaliger Zeit war und lange mustergiltig für alle später erschienenen Rechenbücher blieb. Rudolff ist von der üblichen Weise abgewichen, indem er außer Beispielen und Aufgaben, die dem praktischen Leben angepasst waren, auch Aufgaben mit der

Hosted by Google

Überschrift: „Zu erhebung des verstandts“ in sein Rechenbuch aufnahm, was vor ihm noch keiner versuchte.

4. **Petrus Apianus**[1]) gab schon im Jahre 1527 ein Rechenbuch heraus. Das im Jahre 1537 erschienene Rechenbuch enthält den folgenden Titel:

„Ein newe vnnd wolgegrüñdte vnderweisung aller Kauffmanns Rechenung inn dreien Büchern. Sunderlich was fortel vnnd behendigkeit in der Wellschen Practica vnnd Tolleten gebraucht würt | desgleichen vormals weder in Teutscher noch in Welischer Sprach nie getruckt. Durch Petrum Apianum der Astronomei zu Ingolstatt Ordinarium.“

Das Rechenbuch von Apianus besteht aus drei Theilen. Im ersten Theile werden die 6 Species (Numeratio und Progressio hinzugezählt), die Bruchrechnung und die Regeldetri behandelt. Vor der schriftlichen Addition und Subtraction verrichtet er diese Rechnungsoperationen „auf Linien“, „dieweil“, wie er sagt: „die Sumirung der Register durch die rechenpfeñing auff der lini brauchsamer ist dañ durch die federn oder kreide“. Behufs Erleichterung der Addition empfiehlt er zur Festhaltung der Zahlen den Gebrauch der Fingerbeugungen an der linken Hand, wozu er erläuternde Abbildungen gibt.[2]) Die Regulā de tri behandelt Apianus nach Lehrsätzen des Euklid. Die Unbekannte in der Proportion bezeichnet er mit 0, so dass 4—12—9—0 die Proportion $4 : 12 = 9 : x$ bedeutet.

Im zweiten Theile beginnt Apianus mit der Lehre über Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel, dann folgen Regeln und Beispiele über „Gesellschaftrechnung, Regula Virginum (Cecis), die zweifach Regel de tri, Regula Conversa (umgekehrte Regeltri), Regula Alligationis, Münzzuschlag, Regel von Stich, Regel von wechsel, Regel von gewin und verlust, Regula Fusci (Tara-Rechnung), Regula Falsi (auch augmenti und decrementi, oder Regula Positionum gen.), Factur Rechnung.“

Der dritte Theil enthält die „Welsche Practica“, wie Apianus sagt: „Geschwindigkeyt, so einer auß täglicher übuñg überkompt.“ Hier werden an einer großen Menge von Beispielen die schon viel früher in Italien üblichen Multiplications- und Divisionsvortheile in ihrer Ausdehnung auf den Warenhandel in ausführlichster Weise gelehrt.

Obgleich Apianus in seinem Rechenbuche eine durchwegs praktische Richtung eingeschlagen hatte, so lässt er doch den Rechnungsbeispielen theoretische Erläuterungen vorangehen; aber Beweise des Rechnungsverfahrens vermisst man ebenso wie bei allen anderen Mathematikern und Rechenmeistern des XVI. Jahrhunderts.

---

[1]) Petrus Apianus, dessen eigentlicher Name Bienewitz ist, wurde 1495 in Leisnig geboren und starb im Jahre 1552 als Professor der Astronomie zu Ingolstadt.

[2]) Vgl. die früher beschriebene Fingernumeration „Apianus Rechenb.“

Hosted by Google

Von der großen Zahl der im XVI. Jahrhunderte durch den Druck herausgegebenen Rechenbüchern, welche von Nichtgelehrten, den sogenannten Rechenmeistern, geschrieben wurden, erwähne ich nur die nachfolgenden:

a) „Ein nützlich Rechenbüchlin der Zyffer. Aussgangen durch Abraham Böschensteyn. MDXVI."

b) „Kauffmans handbüchlin. Aller Rechenschafft behendigkeyt auf Linien und Ziphren | durch Georgen Reichelstain. MDXXXIIII."

c) „Rechenbüchlin auff der linien | dem einfeltigen man odder leien .... Gemacht J. Albrecht jm MDXXXIIII jar."

(Dieses Büchlein, welches bereits von mir früher ausführlich beim „Rechnen auf Linien" beschrieben wurde, hatte mindestens 10 Auflagen.)

d) Ain New geordnet Rechenbiechlin auff den linien und mit der kryde odder Schreibfederen | durch die zyfferzal zu rechen. Gemacht von Jacob Köbel | disser zeyt Statschreyber zu Oppenhaym. MDXXXV jar. (Wurde wiederholt aufgelegt.)

e) Ein New Rechenbüchlin | auff der Linien und Federn | die angehenden Rechnern | und allen Kauffshändtlern zu gut und nutz. Mit viel hüpschen Exempeln und Warsagungen | sehr fruchtbarlich einem Jeden zu wissen. Durch Herman Gülfferich zum andernmal gemehret und gebessert. MDLIX.

f) „Ein künstlich Rechenbüchlin auff Zyffer vnnd andern hüpschen Reglen | deßgleichen noch nit an Tag gekommen ist | so durch Leonhartenn H., Teütschen Schulmayster zu Ulm gemacht und geschrieben. MDXLIIII."

g) „New vnd wolgeordnetes Rechenbuch auff der Linie vnd Zyffern | samt der welschen Practica von Simon Jacobs." (Erschien 1569—1612 in mehreren Auflagen.)

h) „Rechenung auff der Linien vnd Federn | auff allerley Handthirung | ein gemeinleicht Büchlin zusammengelesen | für junge anhebende Schüler | gemacht durch Adam Rysen. Anno M. D. XXVII."

Dieses mit verkürztem Titel angeführte, in neuer Auflage im Jahre 1527 erschienene Rechenbuch von Ryse ist das kleinere (nach Scheibel S. 542); mir war es nicht möglich, dasselbe zur Ansicht zu erhalten. Das größere von Ryse geschriebene Rechenbuch, welches erst im Jahre 1550 gedruckt wurde, ist mir bekannt, und ich werde auf dasselbe später noch zurückkommen.

Die Titel der vielfach neu aufgelegten Rechenbücher von Ryse findet man sehr verschieden angegeben, bald kürzer, bald länger. Außer diesen zwei Rechenbüchern schrieb Ryse noch eine „Coß" (Wortgleichungen), welche jedoch erst im Jahre 1860 durch den Druck veröffentlicht wurde.

Hosted by Google

Über Adam Ryse berichtet B. Berlet im Programme Annaberg 1855: „Adam Rys (oder Riess) wurde 1492 zu Staffelstein bei Lichtenfells in Franken geboren. Als Bergbeamter in Annaberg (im k. sächsischen Kreisbezirke Zwickau, im Erzgebirge) hatte er zugleich in dieser Bergstadt eine Privatschule, in welcher er die Rechenkunst lehrte. Seine Rechenschule hatte ihm mit der Zeit soviel eingetragen, dass er imstande war sich ein kleines Gut anzukaufen, welches nach ihm „Rysenburg“ benannt wurde.“

Ryses Rechenbücher zeigen zwar keinen wissenschaftlichen Fortschritt, denn er war kein Mathematiker, sie waren aber in seiner Zeit wegen der glücklich getroffenen Brauchbarkeit unter den damaligen deutschen Rechenbüchern die beliebtesten, und ihr Verfasser lebt so zu sagen noch heute durch das bekannte Sprichwort: „richtig nach Adam Ryse“ im Munde des Volkes.

Von den Mathematikern des XVI. Jahrhunderts, welche sich durch ihre Schriften um die Förderung und Bereicherung der Mathematik überhaupt, sowie insbesondere um die Verbreitung des Zifferrechnens hervorragende Verdienste erwarben, sind außer den vorgenannten noch Cardanus, Clavius, Ramus, Stevin, Stifel und Tartaglia zu nennen.

Cardanus Hieronymus 1501—1575, italienischer Mathematiker, Arzt und Naturforscher, war anfangs Professor in Mailand, später an der Universität in Pavia. Einen Ruf des Königs von Dänemark an die Universität in Kopenhagen schlug er aus, weil ihm Religion und Klima des Landes zuwider waren.

Dass Cardanus einer der leidenschaftlichsten Mathematiker seiner Zeit war, ergibt sich schon aus folgendem Vorfalle: Bei Gelegenheit eines Wettstreites, wie solche damals von eifrigen Mathematikern Italiens häufig angestellt wurden, hatte Tartaglia die Auflösung der Gleichungen des dritten Grades gefunden. Cardanus brannte voll Begierde, diese wichtige Erfindung zu erfahren, aber alle Bitten und Versprechungen prallten an dem Erfinderstolze Tartaglia's ab. Da lockte ihn C. durch Mystificationen nach Mailand und erfuhr endlich durch stürmische Bitten und gegen den Schwur der Verschwiegenheit von Tartaglia das Geheimnis der Auflösung der kubischen Gleichungen. Aber schon wenige Jahre nachher (1545) erschien das Geheimnis mit neuen Entdeckungen von Cardanus bereichert und wurde nach ihm die cardanische Regel genannt. — Berühmt ist seine umfangreiche, vom Jahre 1537 datierte Arbeit „Aritmetica pratica“, welche, mit den Elementen beginnend, das ganze Zahlenrechnen sammt Verwertung der Decimalbrüche beim Wurzelausziehen umfasst und mit den Gleichungen beschließt. In Anwendung des Zifferrechnens auf praktische Rechnungsfälle gibt er nach dem Usus seiner Zeit auch nur Regeln ohne Begründung.

Clavius. Der Jesuit Christoph Clavius (1537—1612) nimmt in Bezug auf die Arithmetik des XVI. Jahrhunderts durch sein im Jahre 1584 zu Köln erschienenes Rechenbuch eine hervorragende Stellung ein. Die Beurtheilung Wildermuths über Clavius lautet: „....Seine Einleitung in die Bruchlehre lässt in Hinsicht auf verständige Anordnung, Klarheit und Vollständigkeit kaum etwas zu wünschen übrig .... Am gründlichsten lehrt Clavius die Regel de tri und widmet einen besonderen Abschnitt schwierigeren Fällen ....“ u. s. w.

Hosted by Google

Ramus Peter, im Jahre 1551 Professor an der Pariser Universität, als Calvinist mehrmals seines Amtes entsetzt, bereiste Italien, Deutschland und die Schweiz, und wurde, im Jahre 1571 nach Paris zurückgekehrt, ein Opfer der Bartholomäusnacht (24. August 1572). Bemerkenswert bleibt seine „Arithmetik", welche im Jahre 1555 erschienen ist. Während seines Aufenthaltes in Deutschland veröffentlichte er seine „Zwei Bücher Arithmetik". In diesen erwähnten Ausgaben sind besonders die Zahlenlehre, Verhältnisse und Proportionen (Regel de tri), Wurzelausziehen, Flächen- und Körperberechnungen ausführlich und klar dargestellt.

Stevin Simon (1548—1620) zeichnete sich weniger durch seine „Arithmetik" als durch eine andere bedeutend kleinere Schrift aus, mit welcher er im Jahre 1585 die Decimalbrüche, wenngleich noch in schwerfälliger Form, zuerst in einer zusammenhängenden Darstellung lehrte. Wie Stevin die Decimalbrüche im Rechnen gebrauchte, findet man später beim Absatze „Decimalbrüche".

Stifel Michael, geb. 1487 in Esslingen, gest. 1567 in Jena, ursprünglich Augustinermönch, floh im Sommer des Jahres 1522 aus dem Kloster zu Esslingen, um zum Protestantismus überzutreten; er ist als einer der bedeutendsten Mathematiker des XVI. Jahrhunderts bekannt. Obgleich er speciell im gewöhnlichen Zifferrechnen weniger geleistet hat, weil seine Forschungen sich mehr auf das Gebiet der damaligen höheren Arithmetik erstreckten, so hat doch auch seine ausführliche Darstellung der sogenannten „wälschen Praktik" und seine in deutscher Sprache abgefasste Arithmetik, in welche er auch das Rechnen auf Linien aufnahm, viel zur Verbreitung und Aneignung des noch nicht allgemein gekannten Zifferrechnens beigetragen. Michael Stifel (in seinen ersten deutschen Schriften schreibt er sich „Styfel") gab gewissermaßen den deutschen Algebraisten (Cossisten) die abschließende Form in seiner Arithmetica integra und in dem zehn Jahre später erschienenen Werke: „Die Coß Chr. Rudolffs. Mit schönen Exempeln der Coß. Durch Michael Stifel Gebessert und sehr gemehrt. Zu Königsperg in Preußen Gedruckt | durch Alexandrum Lutomystensen im jar 1553".

Da die Coß-Schrift des Chr. Rudolff so selten geworden, dass sie selbst um einen hohen Preis nicht zu haben war, so kam Stifel dem allgemeinen Wunsche entgegen und gab die Schrift Rudolffs nicht allein vollinhaltlich wieder, sondern bereicherte überdies jedes Capitel derselben mit ausführlichen Erläuterungen und passenden Beispielen, so dass er mit Recht auf dem Titelblatte sagen konnte: „Gebessert und sehr vermehrt." Der Reihenfolge nach sind von Michael Stifel die nachstehenden mathematischen Schriften erschienen: 1) Arithmetica integra, 1544. — 2) Deutsche Arithmetica (mit dem Inhalte: Hausrechnung, Deutsche Coß, Kirchenrechnung), 1545. — 3) Rechenbuch von der Welschen vnd Deutschen Practick, 1546. — 4) Die Coß Chr. Rudolffs. Ein sehr wunderbarliche Wort-Rechnung, samt einer merklichen Erklärung etlicher Zahlen Danielis, und der Offenbahrung Sanct Johannis, 1553.

Hosted by Google

Tartaglia, der italienische Mathematiker des XVI. Jahrhunderts, erscheint für die heutige Rechenkunst durch seine arithmetischen Schriften als ein Unicum mit Hinsicht auf die gegenwärtig in besonderem Ansehen stehende „Schlußrechnung", deren Keime schon Tartaglia in seine praktische Arithmetik legte, als er die sogenannte „wälsche Praktik", welche nur eine besondere Form der Schlussrechnung ist, nicht allein zuerst im Drucke veröffentlichte, sondern auch mit Umgehung der Proportionsrechnung erweiterte. Auch kann nicht unerwähnt bleiben, dass von den arithmetischen Schrifstellern des XVI. Jahrhunderts nur allein bei Tartaglia das Kopfrechnen, wenn auch im beschränkten Umfange, zu finden ist. Der schriftlichen Darstellung der vier Species lässt er methodisch geordnete Übungen im Kopfe vorausgehen, die er tabellarisch zusammengestellt hat. Obgleich auch Stifel in seinen mathematischen Schriften die wälsche Praktik erläuterte, so hat er dieselbe doch weder in dem Umfange, noch mit der Gründlichkeit wie Tartaglia behandelt.[1])

[1]) Die wälsche Praktik, welche unter den italienischen Kaufleuten bei Warenberechnungen anstatt der Regeldetri schon vor Tartaglia im Gebrauche stand, verbreitete sich im Anfange des XVI. Jahrhunderts von Italien aus nach Frankreich und Deutschland. In deutscher Sprache brachte zuerst Heinrich Grammateus die wälsche Praktik in seinem Rechenbuche (1518).

In der zweiten Hälfte des XIX. Jahrhunderts trat an die Stelle der sogenannten wälschen Praktik (Zerfällungsrechnung) die „Schlussrechnung", welche naturgemäß das Kopfrechnen mit dem Zifferrechnen verbindet, und deren besonderer Wert darin liegt, dass der Rechner während der Rechnungsoperation bei jeder Aufgabe veranlasst wird, sich seiner Gründe für das Rechnungsverfahren immer klar bewusst zu sein, wodurch das gedankenlose Schablonen-Rechnen und jeder geistlose Mechanismus fern gehalten werden. Im Jahre 1877 war die Schlussrechnung noch in keinem Lehrplane für österreichische Schulen vorgeschrieben. Den ersten Impuls zur Einführung der Schlussrechnung für Schulen in Österreich-Ungarn gab zuerst der Verfasser dieser Schrift durch seine zwei Aufsätze im 4. und 5. Hefte der Zeitschrift „Realschule" vom Jahre 1874 unter dem Titel: „Das Rechnen in Gleichungssätzen durch Schlüsse", welche durch Rechnungs-Beispiele erläuterten Aufsätze ein einfacheres und vortheilhafteres Verfahren für alle Rechnungsfälle des praktischen Lebens lehrten.

Jene Art der Schlussrechnung, welche damals an den Schulen Deutschlands gelehrt wurde, entbehrte alle die besonderen Vortheile dieser Rechnungsform, weil die stete Wiederholung des Schlusses von der Mehrheit auf die Einheit und von dieser auf jene die Durchführung äußerst schleppend und weitläufig machte.

Aufsätze über die verbesserte Schlussrechnung in ihrer Anwendung auf alle Rechnungsarten veröffentlichte der Verfasser überdies noch später in der „Zeitschrift für das österreichische Realschulwesen" vom Jahre 1876 und 1877, im „Österreichischen Schulboten" vom Jahre 1877, im II. Jahrgange der Zeitschrift „Bürgerschule", im Jahresberichte 1883/84 des Vereines „Mittelschule" etc.

In dem jetzigen Lehrplane für die österreichischen Gymnasien ist die von dem Verfasser dieses Werkes stammende einheitliche Rechnungsmethode, d. h. das „Rechnen in Gleichungssätzen durch Schlüsse" vorgeschrieben worden, wie es dessen Abhandlung unter dem Titel: „Eine Parallele zwischen dem neuen Gymnasialplane und dem Normal-Lehrplane der Realschulen" in der Zeitschrift für das Realschulwesen im X. Jahrgang (1885), VII. Heft, nachweist.

Hosted by Google

Aus dem Rechenbuche von Tartaglia entnehme ich über die wälsche Praktik die folgende Aufgabe sammt deren Lösung:

1 Pfund (*libbra*) Seide kostet 9 Lire 18 Soldi, wieviel kosten 8 Unzen? (12 Unzen = 1 Pfund und 1 Lira = 20 Soldi.)

Die nicht zu lobende Sitte (sagt Tartaglia) ist die, dass man den Preis von 1 Pfund zuerst durch 12 dividiert und den Quotienten mit 8 multipliciert. Um mit aliquoten Theilen zu rechnen, gibt Tartaglia mit Bezug auf die in Rede stehende Aufgabe das folgende Verfahren an:

Man kann 1. die Unzen zerlegen in 4 + 4 (*per ragione naturale*); 4 Unzen sind $^1/_3$ von 1 Pfund, daher kosten sie L. 3 S. 6, welcher Betrag doppelt genommen L. 6 S. 12 gibt. Oder 2. es können 8 Unzen zerlegt werden in 6 + 2 Unzen; nun sind 6 Unzen die Hälfte und 2 Unzen der 6. Theil von einem Pfunde. Die Rechnung, nach beiden Arten ausgeführt, ist, wie folgt:

1.		2.
1 Pfd. kostet L. 9, S. 18.	Oder:	1 Pfd. kostet L. 9, S. 18.
4 Unz. kosten L. 3, S. 6.		6 Unz. kosten L. 4, S. 19.
8 Unzen . . . L. 6, S. 12.		2 „ „ L. 1, S. 13.
		8 Unzen . . . L. 6, S. 12.

Dieses Verfahren, welches Tartaglia „*pratica naturale*“ nennt, sei, wie er sagt, schon von unseren alten ungelehrten und gelehrten Rechnern (*da nostri antichi naturali ed matematici*) angewendet worden.

Auf diese einfache Rechnungsweise, welche Tartaglia die „natürliche Praktik“ nennt, lässt er die mehr complicierten Rechnungsweisen folgen, welche er die „künstliche Praktik“ (*pratica artificiale*) heißt.

Wie man bemerkt, schrieb Tartaglia die Namen der Geldsorten stets vor die betreffenden Zahlen, und es scheint, dass er den damaligen Schreibgebrauch der italienischen Kaufleute beibehalten habe. Dieser Usus der Vorsetzung der Geldbenennung vor die Zahl, welcher sich auch bei deutschen Kaufleuten bis heute erhalten hat, dürfte italienischen Ursprunges sein.

Bei unseren gegenwärtigen decimalen Münzen, Maßen und Gewichten besteht nicht mehr die Blütezeit der wälschen Praktik; ihre Vortheile behaupten sich theilweise nur noch in der Zinsenrechnung.

Hosted by Google

Zehnter Abschnitt.

Die Arithmetik des XVII. Jahrhunderts.

a) Umrisse über die methodische Behandlung des arithmetischen Lehrstoffes im XVII. Jahrhunderte.

Im XVII. Jahrhunderte hatte sich die Literatur des Zifferrechnens quantitativ nicht unbedeutend vermehrt. Während im vorigen Jahrhunderte über die Hälfte der arithmetischen Bücher in lateinischer Sprache erschienen, dürfte dies im XVII. Jahrhunderte bei kaum mehr als dem fünften Theile der Fall gewesen sein. Sogar in der Zeit des 30jährigen Krieges führt Murhard über 60 Rechenbücher auf. Qualitativ hat jedoch die Rechenkunst im allgemeinen keine besonderen Fortschritte gemacht. Die Büchertitel waren lang und geschmacklos gefasst, und trugen nicht selten marktschreierische Anpreisungen zur Schau. Überdies beginnen die meisten Rechenbücher dieser Zeit mit plump angelegten Widmungen zu Ehren der Fürsten und Rathsherren. — Aus den mir vorliegenden deutschen Rechenbüchern des XVII. Jahrhunderts gebe ich von zweien nachfolgend wörtlich ihre Titel:

1. **Rechenkunst auf Linien und Ziffern**, sambt allerhand Vorteil, Geschwind- und Behändigkeiten, so deut- und verständlich, dass sie ein jeder der ziemlichen Verstandes daraus von ihm selbst begreiffen müsse, neben angehengter konferirung und vergleichung des Frucht- und Weinmaßes... etc. Allen Weinhändlern und Zäpffern nütz- und dienlich... etc., desgleichen vormahls so artig und schön in taffeln verfasset im Druck nie mehr gesehen worden. Gemacht von Nicolaus Kauffunger aus Witzhausen. Verlegt in Frankfurt **1612**.

2. Arithmetischer Trichter von Johannes Hameling, dass die edle Rechenkunst als durch einen Trichter eingegossen, angelehrt und erlernt werden kann.... etc.

Hannover 1677.

Hosted by Google

Das vor mir liegende Rechenbüchlein von Ernst Struntz, Leipzig 1697, unter dem Titel: „Vorteilhaffte Anweisung zur kurtzen Rechenung... etc.“ ist dem Raths- und Kauffherrn zu St. Annebergk gewidmet. Die Widmungsrede enthält nach vorausgegangenem Lobspruche am Schlusse:

„.....mit der Bitte, mein Buch wieder Lästerer (so offt von der Sache reden, die sie nicht verstehen, censiren, was sie zu bessern nicht vermögen) zu vertheidigen, und in Dero Gewölbern eines Oertgens zu würdigen.“

Um sich einigermaßen eine Vorstellung von der Beschaffenheit der Rechenbücher dieses Jahrhunderts machen zu können, hebe ich aus den mir vorliegenden Büchlein einige Definitionen heraus, die ich nachfolgend wörtlich wiedergebe.

In dem vorerwähnten Rechenbüchlein gibt Ernst Struntz durchwegs in höchst sonderbarer Kürze seine räthselhaften Erklärungen in ähnlicher Weise, wie folgt:

„Das Addiren besteht darin, dass ich die unter einander stehenden Zahlen in eine Hauptsumme bringe, hebet bei der rechten Hand an.“

„Zur Regula detri gehören die Exempla, welche in Mitten ein oder unterschiedliche Stück, Rthlr., Groschen, Pfennige, hinden aber zu Frag Zahl, wie theuer kommen, eine einfache oder doppelte Zahl, welche Doppelzahl ohne Rest kann in eintzelne nach dem Einmahl Ein zerfället werden, haben.“

In einer anderen arithmetischen Schrift aus dem Jahre 1697 ist zu lesen: „Die Addition ist so viel als Versammlung. Multipliciren besteht darin, dass ich eine Zahl nach Belieben vergrößer. Die Welsche Practica ist eine geschwinde Rechnung so durch tägliche Übung und Practicirung erfunden worden, und besteht vornehmlich in der Proportion und Zerstrewung der Zahlen, wird auch daher die Welsche Practic genand, weil sie erstlich von den Italianern oder Welschen erfunden worden.“

Was die Quantität der Rechnungsformen betrifft, so behandeln alle Rechenbücher die vier Species in ganzen und gebrochenen Zahlen, die Regeldetri in ihrer mannigfaltigen Anwendung auf praktische Rechnungsfälle; vor allem aber die wälsche Practik, die man im XVII. Jahrhunderte sehr cultivierte und in hohem Ansehen hielt. Einige Schriftchen behandeln allein diese Rechnungsweise, die sie zum Gebrauche der „vornehmer Kauff- und Handels-Leuthe“ verfassten.

Der arithmetischen Prosa des XVII. Jahrhunderts steht die arithmetische Poesie entgegen, durch welche Regeln und Aufgaben nach der Weise der Inder in Versen dargestellt wurden. Eine solche poetische Arithmetik ist unter anderen von Meichsner erschienen, der auf das Titelblatt seines Rechenbüchleins den schreckenerregenden Vers setzte:

„Liss Schreib vnd Rechne jederzeit,
der Jüngste Tag ist nicht mehr weit.“

Hosted by Google

Hier folgen aus dem erwähnten Rechenbüchlein im Auszuge einige poetische Musterproben:

Additionssregel. „Von der Recht gen der Linken Hand,
Setz du die Zipher allesand,
Die erst vnter das erst merk wol,
Jede Zipher man setzen soll,
Und also thu ihm stets vnd für,
dass man der Kunst Subtilheit spür," etc.

Für die Division. „Bleibt nach dem Abzug mehr als der Divisor stehn,
So ist der Quotus um eine Zahl zu klein,
Kann von der obern Zahl der Abzug nicht geschehn,
So ist der Quotus zu gross, er muss was kleiner sein".

Für die Regeldetri. „Die letzten zwei multiplicire,
Was kommt durchs erste dividire,
So forne Brüche sind, die Nenner wirff zuletzt,
Die letzt- und mittelsten die werden vorgesetzt", ... etc.

Das Rechnen auf den Linien findet sich in der ersten Hälfte des XVII. Jahrhunderts nur noch durch acht arithmetische Schriften vertreten, von welchen eine, nämlich die Rechenkunst auff Linien und Ziffern von Nicolaus Kauffunger vom Jahre 1612, mit dem vollständigen Titel bereits erwähnt wurde.

Obgleich die Fortschritte der Rechenkunst in Vergleich zu den großen Entdeckungen, welche das XVII. Jahrhundert auf dem Gebiete der höheren Mathematik machte, als nur gering erscheinen, so dürfen doch die Erfindungen der Decimalrechnung und des Kettensatzes (Reesischen Satzes) in ihrer Eigenheit nicht unterschätzt werden, bei welchen Rechnungsformen, obzwar sie einem älteren Ursprunge angehören, die allgemeine Anwendung doch erst im XVII. Jahrhunderte angenommen werden kann.

Decimalbrüche. Die ersten Anfänge der Decimalbrüche findet man beim Wurzelausziehen schon im XII. Jahrhunderte in der arithmetischen Schrift des Johann von Sevilla; im XV. Jahrhunderte gebrauchten Peuerbach (1423—1461) und noch mehr sein berühmter Schüler Regiomontan (geb. 1436, gest. 1476 in Rom) die Decimaltheilung, welche auch beim Wurzelausziehen im XVI. Jahrhunderte in der Aritmetica practica (1537) des Cardanus, in Chr. Rudolffs „Coss" (1525) und im Rechenbuche (1550) von Adam Ryse vorkommt. Um beim Ausziehen der Quadratwurzel aus nicht quadratischen Zahlen Näherungswerte zu finden, pflegte man der gegebenen Zahl Nullenpaare anzuhängen; so gab ein Nullenpaar (00) eine Genauigkeit bis $\frac{1}{10}$, zwei Nullenpaare (0000) gaben eine Genauigkeit bis $\frac{1}{100}$, u. s. w. Sollte demgemäß $\sqrt{13}$ bis auf Tausendtel berechnet werden, so schrieb man $\sqrt{13000000} = 3605$ und nach Abstreichung von drei Ziffern rechts (605) setzte man $3\frac{605}{1000}$ als gefundene Wurzel an. In astronomischen Berechnungen wurde sodann der decimale Bruchwert in Graden, Minuten und Secunden der 60theiligen Brüche (Sexagesimalbrüche) umgerechnet.

Hosted by Google

Die erste zusammenhängende Lehre über Decimalbrüche gab Simon Stevin in seinem zehn Octavblätter enthaltenden Schriftchen, welches im Jahre 1585 unter dem sonderbar klingenden Titel „La Disme“ (d. h. „der Zehnte“) erschien.

Stevin setzte bei einem Decimalbruche nach der Ziffer der primitiven Einer eine in einem Kreise (Ringlein) eingeschlossene Nulle; bei den Decimalziffern gebrauchte er in der Ordnung der natürlichen Zahlen die in Kreisen oder in Rundklammern eingeschlossenen Ziffern, welche als Zeichen des Decimalbruches galten. So z. B. findet man bei Stevin den Decimalbruch 34·7605 auf die folgende Art geschrieben: $34^{(0)}7^{(1)}6^{(2)}0^{(3)}5^{(4)}$.

In dieser sichtlich schwerfälligen Darstellung hat Stevin die Decimalbrüche in den Grundrechnungsarten angewendet. So z. B. wird nach seiner Anleitung aus der Multiplications-Aufgabe

$$0{\cdot}0426 \times 0{\cdot}28 = 0{\cdot}011928$$

das Product in folgender Weise berechnet:

$4^{(2)}2^{(3)}6^{(4)}$
$2\ \ 8^{(2)}$
$3\ 4\ 0\ 8$
$8\ 5\ 2\ 0$
$1^{(2)}1^{(3)}9^{(4)}2^{(5)}8^{(6)}$

Was die nebenstehende Berechnung des Productes aus den Factoren 426×28 betrifft, so findet man, dass die hier gebrauchte Multiplicationsmethode mit der heute noch üblichen identisch ist. Im XVI. Jahrhunderte waren noch andere aus Italien nach Deutschland gekommene Multiplicationsmethoden im Gebrauche, von denen aber keine so einfach war, als die hier dargestellte. Eine sehr complicierte Multiplicationsmethode war die sogenannte „Multiplication per crocetta“, von welcher Lucas de Borgo (lehrte Mathematik in Mailand 1496—99) sagt, dass diese Methode mehr Phantasie und Verstand als alle anderen Methoden voraussetzt.

Bei dieser Methode, bei welcher die Anschreibung der Theilproducte wegbleibt, verfährt man derart, dass man die Multiplication mit den Einern beginnt und fortfahrend sämmtliche Einzelnmultiplicationen ausführt, welche in ihrer Zusammenfassung der Reihe nach im Totalproducte Zehner, Hunderter, Tausender etc. zu geben imstande sind, wie dies durch die Verbindungsstriche und Buchstabenfolge in untenstehenden vier Multiplicationen ersichtlich gemacht wird.

$4\quad 3 \times 43$

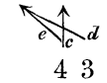
$4\quad 3$
$18\ 4\quad 9$
2

a) $3 \times 3 = 9\ E$

Für Zehner: *b)* $3 \overset{Z}{.}\ 4 + 4 \overset{Z}{.}\ 3 = 24$ Z, (nun 4 Z angeschrieben, 2 H weiter gez.).

Für Hunderter: *c)* $4 \overset{Z}{.}\ 4 = 16$ H und 2 H = 18 H.

$7\quad 4\ 3 \times 43$



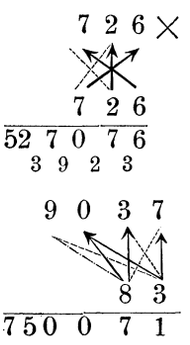
$4\ 3$
$31\ 9\ 4\ 9$
$3\ 2$

Einer und Zehner im Hauptproducte werden wie oben gefunden. (Die Addition der Einzelnproducte geschieht im Kopfe.)

Für Hunderter *(c, d)*: $4 \overset{Z}{.}\ 4 + 3 \overset{H}{.}\ 7$ und 2 H sind = 39 H.

Für Tausender *(e)*: $4 \overset{Z}{.}\ 7 = 28$ T und 3 T sind $\overset{3}{}\ \overset{T}{31}$ T.

Hosted by Google



$\overset{E}{36}$, $12 + 12 + 3 = \overset{Z}{27}$
2 H

Für Hunderter: $6 \cdot 7 + 2 \cdot 2 + 7 \cdot 6$ und 2 H sind 90 H
(oder $6 \cdot 7 + 7 \cdot 6 + 4$ und 2 H = 90 H)
Für Tausender: $2 \cdot 7 + 7 \cdot 2$ und 9 T sind 37 T
Für Zehntausender: $7 \cdot 7$ und 2 ZT = 52 ZT.

Die erste im XVII. Jahrhunderte in deutscher Sprache verfasste Schrift über die Decimalbrüche ist jene, welche Beyer (prakt. Arzt in Frankfurt) im Jahre 1619 unter dem folgenden Titel veröffentlicht hatte:

Kunstrechnung der zehntheyligen Brüche, denen Geometris, Astronomis, Landmessern, Ingeneuren, Visirern, vnd insgemein allen Mechanicis vnd Arithmeticis, zu vnglaublicher Leichterung jhrer Mühesamen Rechnungen, Extractionen der Wurtzeln, sonderlich auß den Jrrationalzahlen... etc. über die maß dienstlich und nothwendig. Beschrieben durch Johannes Hermann Beyer, Dr. Med. ord. zu Frankfurt am Meyn. Anno MDCXIX. Getruckt durch Nicolaus Hoffmann.

In der „Vorrede“ sagt Beyer: „Zu der Invention dieser zehntheyligen Brüchen ist mir erstlichen Anno 1597, als ich mich zuweilen (so vil ich anderer meiner Amptsgeschäften halben Zeit hatte) in den mathematischen Künsten erlustigte, von den Gestirnkünstlern folgender gestalt Anlaß gegeben worden. Ich habe dermalen in acht genommen, dass die Mechanici, wenn sie eine Quantität abmessen, gar selten eine gantze Zahl ihrer Grundmaß (als, Ruthen, Ellen, Schuh, Grad etc.) antreffen. Vnd derhalben dasjenige, was weniger ist, als ein solches Maß, bruchweise beifügen müssen. So die Astronomie ihre Circulbögen, wann sie geringere Theile, als Grad, haben, mit 60theyligen subordinirten Scrupuln messen, vnd zehlen. Nachdem ich aber betrachtet, dass die 60theyligen Brüche, einen von der gemeinen Rechenkunst abgesonderten und sehr mühsamen Calculum erforderten: Hab ich meine mechanische Brüche allein in zehn, als einer sonderlich bequemen vnd gleichsamb priviligirten Zahl angenommen, wegen großer Vortheile, welche im addiren, subtrahiren, vnd vornemblich im multipliciren vnd dividiren, einzig bei 10 und bei keinern andern Zahl zu finden“ . . . . . etc.

Wie Beyer in seiner Schrift die Decimalbrüche behandelte, und wie deren weitere Entwicklung und praktische Anwendung im Verlaufe des XVII. Jahrhunderts sich gestaltete, dies detailliert dargestellt, würde die enggezogenen Grenzen meiner Arbeit überschreiten, welche ich mit der nachfolgenden kurzgefassten Darstellung der Regeldetri beschließen muss.

Kettensatz. In Deutschland findet man die erste Spur des Kettensatzes im „Exempelbüchlein“ (1540) von Chr. Rudolff und in Adam Rieses Rechenbuche vom Jahre 1550; von da an aber nicht mehr bis zu dem Engländer Wingate, der sie in der 2. Auflage seiner Arithmetik vom Jahre 1668 ausführlich lehrt.

Hosted by Google

In Adam Rieses Rechenbuch steht die folgende Aufgabe über den Kettensatz:

„7 Pfund von Padua thun 5 Pfund zu Venedig, und 10 von Venedig thun 6 zu Nurnberg und 100 von Nurnberg thun 73 zu Cöln, wie viel thun 1000 Pfund von Padua zu Cöln.

Setzt also:

7 Padua 5 Venedig
10 Venedig 6 Nurnberg 1000 Padua
100 Nurnberg 73 Cöln

Multiplicir die vordern mit einander, desgleichen auch die mitteln, steht:

7000 2190 1000.“

Dann wird weiter angeführt, dass man nach der bekannten Regel, wie sie früher gegeben wurde, zu rechnen habe.

Als Endresultat ist angegeben:

Facit 312 Pfund sechs siben teyl (d. h. $312^{6}/_{7}$ Pfund).

Das zweifelhafte Verdienst der allgemeinen Verbreitung des Kettensatzes, durch welchen der Rechenunterricht in den Schulen eine lange Zeit mechanisiert wurde, gehört in erster Linie dem Caspar Franz von Rees an. In der von Lorenz Willich (Secretär der Stadt Göttingen) im Jahre 1743 herausgegebenen deutschen Übersetzung des von Rees in holländischer Sprache (1740) verfaßten Rechenbuches sagt Rees in der Einleitung zum Kettensatze:

„Man muss alle Zahlen, welche in einer vorgelegten Frage befindlich sind, in zweyen Columnen oder Gliedern aufschreiben. Die eine Columne zur Rechten, die andere zur Linken; hierauf muss man sonderlich wohl acht haben. Daher müssen diejenigen Zahlen, deren eine aus der andern bestimmt wird, nicht in einerlei Columne stehen, sondern in unterschiedene gesetzt werden. Wenn also gesagt wird: 100 fl. bringen 4 fl., so müssen 100 fl. auf einer Seite stehen und die 4 fl. auf der andern; es ist gleichviel, auf welcher Seite, es sey die Rechte oder Linke, die Zahl gesetzt wird, wenn sie nur nicht auf eine kommen... etc.“ [1])

Regeldetri. Bei Beschreibung der „indischen Rechenkunst nach Brahmagupta und Bhascara (III)“ wurde unter anderem auch die den Indern schon im VII. Jahrhunderte bekannte Regeldetri erklärt. Im Verlaufe der Jahrhunderte blieben die von den Indern stammenden Rechnungsoperationen dem Wesen nach unverändert, und so finden wir, dass auch die Regeldetri des XVI. und XVII. Jahrhunderts mit der indischen Regeldetri aus dem VII. Jahrhunderte identisch ist. Sowie man bei den Grundrechnungsarten gedankenlos nur nach mechanisch eingelernten Regeln und Kunstgriffen verfuhr, so geschah dies auch bei Lösung der im Geschäftsverkehr vorkommenden Auf-

[1]) Der Kettensatz war schon den Indern im VII. Jahrhunderte bekannt; denn in der indischen Schrift nach Brahmagupta (siehe III., Regeldetri) findet man bereits die Regel des Kettensatzes angewendet.

Hosted by Google

gaben nach der damals vielberühmten Regeldetri. Widman sagt von ihr: „...gleycher weyß alß ein hammer in eyner schmit zu viel hübschern dingen dan er an ym selbst ist.“ Im Rechenbuche des Adam Ryse aus dem Jahre 1550 findet man die Regeldetri in folgender Weise erklärt:

Regula de tri ist eine Regel von dreyen Ding/ setz hinden das du wissen wilt/ würdt die Frag geheissen/ das jhm under den anderen zweyen am namen gleich ist/ setz forn/ vnd das ein ander Ding bedeut in mitten/ darnach multiplicîr das hinden vnd mitten stet durcheinand. Das daraus kompt theyle ab mit fordern so hastu wie thewer das dritt kompt/ und dasselbige ist an namen gleich den mitteln/ als hie in volgendem Exempel“:

Item 32 eln tuchs für 28 florens/ wie kommen 6 eln?

	Eln	fl	eln
setz also:	32	28	6

Facit 5 fl. 5 Gr.

Die Probe macht Riese nach seiner Angabe so:

„Verker di regul also/ das hinden gestanden ist/ setz forn das Facit mitten/ vnd das forn gestanden ist/ hinden. Machs als dann nach gesagter regul/ so muss widder kommen/ das vordem mitten gestanden“.

Diese Regel, welche den Kaufleuten am meisten zusagte, wurde *Regula mercatorum* (Regel der Kaufleute), auch *regula aurea* (goldene Regel) genannt.

Zur Lösung der Regeldetri mit Brüchen gibt Ryse die folgende Regel an: „Würdt dem fordersten ein Pruch zugesatzt/ so geh mit sinem Nenner ins hinder/ Wo dem mitlen oder dem hindern/ so geh mit seinem Nenner ins forder/ Alsdann brich die gantzen in seine theyl bei dem Pruch“. Diese dem XVI. Jahrhunderte angehörige Regel galt auch im folgenden Jahrhunderte als Regulativ bei Lösung der Regeldetri-Aufgaben. Bei dieser mechanisierenden Methode des Rechnens wurde die Denkkraft des Schülers fast gar nicht, das Gedächtnis aber im hohen Grade angestrengt; denn in der That war es kein geringes Verlangen, dass der Rechner sich die vielen Regeln und die handwerksmäßigen Kunstgriffe genau merke, und sie rechtzeitig und passend anwende. Dieser Jahrhunderte langen Vernachlässigung der geistbildenden Seite des Rechnens machte die Schule Pestalozzis in der zweiten Hälfte des XVIII. Jahrhunderts ein Ende; von da an bestrebte sich der Arithmetiker mit dem Pädagogen vereint, um die Methode des Rechenunterrichtes zu verbessern. Diese Bestrebungen und erzielten Erfolge zu schildern, gehört nicht mehr in den Rahmen meiner Aufgabe.

Verschiedene Rechenbücher des XVII. Jahrhunderts giengen über die gewöhnlichen Rechnungsarten der Geschäftspraxis hinaus, indem sie auch in ihren Lehrstoff aufnahmen: Progressionen, Extrahieren (Ausziehen) von Wurzeln, Regula falsi, Berechnung der Flächen- und Körperinhalte, wozu auch nicht selten die Cossische Wortrechnung beigefügt

Hosted by Google

wurde, welche ihrem Wesen nach in allgemeinen Umrissen durch die nun folgende Darstellung gekennzeichnet wird.

b) Cossische Wortrechnung der alten deutschen Algebraisten.

Jener Theil der Rechenkunst (Arithmetik), welcher sich mit der Auffindung unbekannter Größen durch Hilfe der Gleichungen beschäftigt, heißt eigentlich Algebra, wenngleich nicht selten unter Algebra manche Mathematiker die Buchstabenrechnung verstehen. Das Falsche dieser Annahme erhellt schon daraus, dass die Buchstabenrechenkunst (allgemeine Arithmetik) von dem französischen Mathematiker Franz Viète (geb. 1540, gest. 1603) stammt; also der neueren Zeit angehört, während schon im IV. Jahrhunderte die Algebra (eigentlich Gleichungslehre) in ihren Anfängen bekannt war und im Laufe der Jahrhunderte erweitert wurde.

Bei den alten italienischen Algebraisten, welche sich früher als die deutschen Rechenmeister mit der Auflösung von Gleichungen beschäftigten, wurde die unbekannte Größe oder Wurzel der Gleichung **cosa** (Ding) und die damalige Algebra „Arte bella cosa“ oder „Regola de la cosa“ genannt. Aus diesem Grunde wurde bei den Deutschen durch eine lange Zeit die Algebra „Coß“ oder „Cossische Wortrechnung“ und die dieser Rechnung Kundigen auch „Cossisten“ genannt.

Der älteste uns bekannte deutsche Algebraist war Christof Rudolff von Jauer (in Schlesien). Seine Schrift erschien im Jahre 1524. Er geht nur bis zur Auflösung quadratischer Gleichungen und solcher höheren, die zu quadratischen gemacht oder wie quadratische behandelt werden können. Seine Schrift wurde von Michael Stifel (geb. 1487, gest. 1567), welcher der zweite deutsche Algebraist ist, im Jahre 1553 verbessert und vermehrt unter dem folgenden Titel herausgegeben:

Eine sehr wunderliche Wortrechnung, samt einer merklichen Erklärung etlicher Zahlen Danielis | und der Offenbarung Sanct Johannis. Mit schönen Exempeln der Coß. Durch **Michael Stifel** Gebessert und sehr gemehrt. Zu Königsperg in Preußen Gedruckt | durch Alexandrum Lutomystensen im jar 1553.

Über die sogenannte „Coss“ oder Cossische Wortrechnung liegt mir eine in Quartform herausgegebene Schrift von 24 Seiten vor. In derselben spricht ein Anonymus eine tadelnde Kritik über die Aufgaben und die Lösung der „Cossischen Wortrechnung“ aus, welche Johann Krafft im Jahre 1614 dem ersten Theile des von ihm verfassten Schul-Rechenbüchleins angehängt hat. — Diese kritisierende Schrift des ungenannten Verfassers führt den folgenden Titel:

„Analysis, das ist: Aufflösung der Wortrechnung Johannis Krafften Schulmodisten in Vlm | etc. angehenkt | Dem ersten Theil seines Schulbüchleins | So dieses 1614. Jahrs | in offentlichem Truck außgangen | verfertiget: Durch Einen der Mathe-

Hosted by Google

matischen Künsten begierigen Liebhaber dessen Nam in zu End gesetzter Wortrechnung verschlossen. Nürnberg. Gedruckt bey Abraham Wagenmann | Im Jahr | M. DC. XIV."

Diese kritisierende Schrift ist gewidmet: Den Ehrenvesten | wohlgelehrten | Kunstreichen vnd weitberühmbten Herren: **Dn. M. Simoni Rettero,** Nördlingensium Scholae Rectori, etc., **Dn. Sebastiano Curtio,** Rechenmeister vnd der Teutschen Schulen zu Nürnberg Visitatori, **Dn. Joanni Faulhabero,** bestellten Rechenmeister zu Vlm. Die Widmung beginnt: „Dieweil Ehrenveste | Wohlgelehrte | sonders günstige Herren und Freund | Ich mich mit Arithmetischen Fragen | sonderlich denen | so mehrmalen kunstreiche Modisten jhren divulgirten Büchern zu end anhefften und Wortrechnungen nennen | als in welchen jhre tiefsinnigsten Speculationes und größte Kunst verschliessen | vielfeltig zu belustigen pflege".....etc.

Der Schluss bringt: „...darumb will Ewer Ehrenvest. samptlich als Erfahrensten vnd Wolgeübtesten dieser Kunst | Ich solche lucubration hiemit bester wolmeynung offerirt vnd dedicirt haben | E. E. judicium darüber erwartend | vns alle Göttlichem Schutz empfehlend | E. E. Dientgefließner. Zu End durch die Wortrechnung Benahmter.

Wie aus der vorbetitelten Schrift zu entnehmen ist, sagt Johann Krafft im Vorworte seines Coss-Büchleins Folgendes:

„Dieweil dann gedachter Herr Michael Stifel seliger | so reichlich vnd überflüssig solch sein Apiani Buch hat erklärt vnd an Tag geben weil mir als den mindern keineswegs gebühren | mich mit andern Federn zu bekl̈aiben | vnd darmit als ein Pfaw mit offner Wannen herfůr zu prangen | als were es mein eigne Kunst | da ich aber vnter sich würde sehen | das ist | da mir dergleichen Bůcher bevor ab | Herrn Michael Stifels wůrde vnter die Nasen gestossen | so wůrden mir nit allein solche entraubte Federn entzogen | sonder als schamroth wurde da stehn | etc..... Also kőnte jm einer selbst eygene Exempel machen | vnnd darnach dieselben vermischen | vnd ander dergleichen versetzungen| mit blőssigem abschreiben gebrauchen | vnnd sich dess trősten | dass man niemand vmb solchen Diebstal an den Galgē hencke: Nein (sagt Stifel) solcher Ding tauge keins | etc.".... Dem entgegen schreibt der anonyme Verfasser als Kritiker: „Sintemahl sich Herr Johann Krafft auss eygnem Mund richtet, so lasse ichs bey demselbigen verbleiben | vnnd wil allein die Wortrechnung erőrtern, weil solche also gestaltet, dass darauss nit allein Herrn Kraffts vnverstand in Arithmeticis | vnd dass er seines Büchleins nit Author seyn kőnne | sodern dass in solcher der Kunstliebende Leser seltzam bey der Nasen vmbgeführt | vielleicht die edle Zeit neben arbeitsseligem Nachsinnen (wie dann auch mir fast geschehen were) vergeblich anwenden möchte" etc.

Hosted by Google

Die Zahlwörter aus Idiomen der asiatischen, afrikanischen und amerikanischen Sprachen.

chen	1	2	3	4	5	6	7	8	9
e	ĕka	dva (dvi)	tri	čatvâr	páṅčan	šaš	sáptan	áštan	návan
.....	iek (jek)	du	se (si)	cehar	peng	ses	heft	hest	nüh
.....	ek (yek)	do (du)	tin (ce)	char (cihar)	panch	cha (xax)	sat (haft)	atth	nao (noh)
Baikalsee)	iga	lianga	ssanga	siggę	ugę	lugę	szigę	baya	dshugę
.....	i	eul (ñi)	san (tàm)	ssë (tu)	ü (ngù)	lü (lüc)	tsi (thàt)	pa (bât)	kieü
.....	aei	gie (dzi)	saem	sie	ha	hoock	tser	pet	kau
.....	chihk	ñi	sum	sgi	ñha	trun	thun	kje	kü
.....	fitotzu	futatzu	mitzu	iotzu	itzutzu	mutzu	nanatzu	iàtzu	koconotzu
.....	echad	schenaîm	schelosca	arbahha	chamisçsça	sçisçsça	sçibhha	sçemona	thiçdha
.....	had	tren	tlolo	arboo	hamscio	scheto	scaboo	tmonio	teschioo
.....	hhdo	tartin	tloto	arbago	hhamso	seth	sabgo	tmanìo	tsag
.....	vaged	atnim	talat	arbaa	jamscia	sciata	sciabaa	temania	tesciaa
.....	vvaged	ténen	tatlat	arbá	hamsè	sette	sabà	tamánìa	tzà
Coptisch	oëai	snaë	scomt	fti (fto)	tioë	sooë	scasof	scmoën	psit
.....	mi (mej)	jergu	jerek	ciuòrs	hink	vietz	hotn	utn	jun
....	sigi	lorü	talu	pappat	lima	nunnam	petu	vvolo	songo
r	isa	arni	télo	efat	dimi	elëa	fito	oualo	sini
aftsinseln	atahav	lua	tolü	tfa	nema	uano	fidda	uarü	heeva
l	tahai	rua	torü	ha	rema	ono	etu	vvarü	iva
.....	dè	aoüe	otton	cnè	atton	troupo	keoüe	qui-a-ton	kenê
(auf der Insel α)	sa	dua	tíga	ampát	líma	anam (njam)	dugo	dëlapan	sëmbilan
β)	aát	ári	tschil	abáng	eliim	oán	etsch	ewal	atún
γ)	táhi	ruah	tórah	fáh	limah	ono	fitu	wáru	síwo
kobar	häng	anát	lueh	fön	tanéi	tafúl	sat	háware	matiútare
Nikobar δ)	heáng	áh	loéh	fuán	tanéi	tafúel	ischiát	oenfoán	héang-hata
zambique	moassa	pili	thára	ssessé	thana	thana moasa	thana pili	thana thára	looko
.....	guh	didy	taty	naye	guieve	guie-guh	guie-didy	guie-taty	guie-naye
lianer	mai	paya	kimsa	pusi	pisca	sogta	pacalco	kímsacalco	pusîcalco
ner	ceänt	huälpon	huaeia	moâcoa	anxūvi	acevi	ahuapoa	ahuaeica	amoâcua
aner	yaagüit	uké	nipetnéi	yepcatalét	isig-nisle yaagüit (d. h. alle Finger einer Hand)	isig-teét yaagüit (d. h. alle Finger und 1)	isig teèt ukè (alle Finger und 2)	isig teèt nipetnéi (alle Finger und 3)	isig teét yepcatalét (alle Finger und 4)
kaner (Azteken) .	ce	ome	yei	nahni	macuili	chicuace	chicuome	chicuyei	chicuanahni
.....	kiñe	epa	kula	meli	keku	kayu	relghe	pura	ailla
.....	petei	môcoi	mbohapi	irundî	irundi hae nirûi (d. h. 4 und der andere)	ace pôpetei, hae petei abé (die Hand und 1 mehr)	ace pôpetei, hae môcoi abé (die Hand und 2 mehr)	ace pôpetei, hae mbohapi abé (die Hand und 3 mehr)	ace pôpetei, hae irundi abé (die Hand und 4 mehr)
Inkas)	huc oder suc	iscai	kimsa	tahua	pichea	socta	canchis	pussac	iscon
Indianer	tevinitpe	akkiakè	akkiluòve	akkiakemnene	amñaitòne (d. h. ganze Hand)	itakonò amūpona tevinitpe (der anderen Hand eins)	itakonò amūpona akkiakè (der anderen Hand zwei)	itakonò amūpona akkiluòve (der anderen Hand drei)	itakonò amūpona akkiakemnene (der anderen Hand vier)
.....	atomscha	melrony	pingasuit	sitamany	tadlimany	aquanat	melrony aquanat (2 an der anderen Hand)	pingasuit aquanat (3 an der anderen Hand)	sitamany aquanat (4 an der anderen Hand)

ungen. α) Nach den Berichten aus dem Werke „Reise der österr. Fregatte Novara um die Erde in den Jahren 1857—1859“ sprechen die Eingebornen der Insel me die Zahlwörter wie folgt aus: 1 = satú, 2 = duá, 3 = tiga, 4 = umpát, 5 = lima (Hand), 6 = njam, 7 = tutschó, 8 = lapan, 9 = sambilán, 10 = sibuló, 11 = sebelás, 20 = dua-puló, 21 = dua-puló-satú, 22 = dua-puló-duá . . . . etc.; 30 = tiga-puló, 40 = ampát-puló, 50 = lima-puló, 60 = njam-puló . . .; 100 = saratus, 1000 = siribú β), γ), δ) angeführten Zahlwörter der Eingebornen auf den Inseln Puynipet und Sikayana (Karolinen-Archipel) und auf dem Nikobaren-Archipel sind ebenfalls aus de 3 und Beilagen Nr. II und III entlehnt worden.

hlwörter der Eskimos sind aus dem im Jahre 1881 unter dem Titel: „Als Eskimo unter den Eskimos“ von Heinr. W. Klutschak, Mitglied der letzten Franklin-Aufsuch -1880, erschienenen Werke entnommen worden, in welchem auf S. 86 der Verfasser sagt: Eine der schwächsten Seiten in der geistigen Entwicklung des Eskimos ist da solut nur bis zwanzig. Die Zahlennamen sind: . . . . 11 = aquanakpuk, 12 = melrony-aquanakpuk, 13 = pingasuit-aquanakpuk . . . . 19 = sistamany-aquanataquanakpuk nzig übersteigt, wird mit Hilfe der Finger genau, oder mit „amischnadly“ (viel) ausgedrückt. Klutschak sagt: Die Zahl 7 ist das zweite 6, demnach melrony-aqua sein: 7, 8 und 9 werden durch 2 (melrony), 3 (pingasuit), 4 (sitamany) an der zweiten Hand (von der Fingerzählung stammend) angegeben und melrony-aquanat (zwei weiter Finger an der anderen Hand etc. In der von Rüdiger verfassten „Geschichte der menschlichen Sprachen“, S. 128, findet man hingegen, dass gebrauchen: 1 = attausek, 2 = arlaik, 3 = pingajuek, 4 = sissamat, 5 = tellimat, 6 = arbanget, 7 = arbanget-marluk, 8 = arbanget-pingasut, 9 = kollin-illoät, 10 = Namen gleicher Zahlen dürfte Cranz's Historie von Grönland in folgendem Passus erklären: „Wenn die Eskimos zu der Zahl eine Sache setzen, so beim Personenzählen. Ein Gleiches geschieht auch bei den Tamanaki-Indianern.

Hosted by Google